СФЕРЫ

АЛГЕБРА

АЛГЕБРА

8

АЛГЕБРА

8 класс

Учебник

Допущено
Министерством просвещения
Российской Федерации

3-е издание, стереотипное

Москва
«Просвещение»
2022

УДК 373.167.1:512+512(075.3)
ББК 22.14я721
А45

Серия «Сферы» основана в 2003 году

Линия учебно-методических комплексов «СФЕРЫ» по алгебре

Авторы: канд. пед. наук ***Е.А. Бунимович***, канд. пед. наук ***Л.В. Кузнецова***, канд. пед. наук ***С.С. Минаева***, канд. пед. наук ***Л.О. Рослова***, канд. пед. наук ***С.Б. Суворова***

На учебник получены **положительные** заключения **научной** (заключение РАО №1136 от 19.11.2016 г.), **педагогической** (заключение РАО №1027 от 21.11.2016 г.) и **общественной** (заключение РКС № 347-ОЭ от 19.12.2016 г.) экспертиз.

Издание выходит в pdf-формате.

Алгебра : 8-й класс : учебник : издание в pdf-формате / Е. А. Бунимович,
А45 Л. В. Кузнецова, С. С. Минаева [и др.]. — 3-е изд., стер. — Москва : Просвещение, 2022. — 208 с. : ил. — (Сферы).
ISBN 978-5-09-101237-8 (электр. изд.). — Текст : электронный.
ISBN 978-5-09-095126-5 (печ. изд.).

Данный учебник по алгебре входит в линию учебно-методических комплексов «Сферы» по математике, начатую учебниками для 5–7 классов. Пособие подготовлено в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта. В содержательном плане учебники этой серии отличает усиление общекультурной составляющей, систематическая демонстрация связи математики с окружающим миром, внимание к развитию познавательных способностей ученика, коммуникативных умений. Принципиальными особенностями учебника являются фиксированный в тематических разворотах формат, лаконичность и чёткая структурированность текста, использование полей для специальных рубрик с историческими сведениями, справочным материалом, образцами решения, структурированность системы упражнений. Всё это стимулирует осознанное и мотивированное освоение содержания, развитие интереса к предмету.

УДК 373.167.1:512+512(075.3)
ББК 22.14я721

Учебное издание

Серия «Сферы»

Бунимович Евгений Абрамович, **Кузнецова** Людмила Викторовна, **Минаева** Светлана Станиславовна, **Рослова** Лариса Олеговна, **Суворова** Светлана Борисовна

Алгебра

8 класс

Учебник

Центр математики
Ответственный за выпуск *Э.А. Мазурова*. Редактор *Е.В. Зайцева*.
Художественный редактор *А.П. Асеев*. Художники *А.В. Юдин*, *С.Г. Куркина*, *А.П. Асеев*.
Компьютерная вёрстка *А.П. Асеева*.
Дизайн обложки *О.В. Поповича*, *В.А. Прокудина*.
Технический редактор *С.Н. Терехова*. Корректор *Е.В. Барановская*.

Подписано в печать 15.02.2022. Формат 84×108/16. Гарнитура SchoolBookCSanPin, FreeSetC.
Усл. печ. л. 21,84. Уч.-изд. л. 16,58. Тираж экз. Заказ № .

Акционерное общество «Издательство «Просвещение». Российская Федерация, 127473, г. Москва, ул. Краснопролетарская, д. 16, стр. 3, этаж 4, помещение I.

Адрес электронной почты «Горячей линии» — **vopros@prosv.ru**.

ISBN 978-5-09-101237-8 (электр. изд.)
ISBN 978-5-09-095126-5 (печ. изд.)

СОДЕРЖАНИЕ

ГЛАВА 5. ФУНКЦИИ

ГЛАВА 6. ВЕРОЯТНОСТЬ И СТАТИСТИКА

ВВЕДЕНИЕ

Дорогие восьмиклассники!

Каждый учебный год даёт вам возможность открывать всё новые и новые страницы увлекательной, живой, но, как вы уже знаете, совсем не простой науки — математики. И в этом году вы продолжите изучение классических ветвей математической науки — арифметики и алгебры, основ теории вероятностей и статистики.

С первых школьных лет из курса арифметики вам хорошо известны натуральные числа, позднее, расширяя представление о числе, вы узнали о существовании нуля и отрицательных чисел, затем занялись изучением дробей. Так множество рациональных чисел стало естественным обобщением множества целых чисел. А в этом году вы узнаете, что кроме рациональных чисел, которые вам уже хорошо знакомы, есть другие, удивительные и таинственные числа — иррациональные...

Продолжая изучение алгебры, вы узнаете, что, как и в арифметике, в алгебре есть свои дроби — алгебраические, которые тоже можно складывать и вычитать, умножать и делить.

Одной из важнейших тем курса математики этого года станут для вас квадратные уравнения. Решение квадратных уравнений тесно связано с разнообразными практическими задачами, которые вставали перед людьми на протяжении всей истории человечества, начиная с Древнего Вавилона — от проблем измерения площади земельных участков до задач астрономии.

Вы познакомитесь также с одним из самых важных понятий не только математики, но и многих других наук — понятием функции. Продолжите вы и изучение закономерностей в мире случайного — законов теории вероятностей и математической статистики. И если прежде для нахождения вероятностей вам приходилось проводить статистические эксперименты, то в этом году вы узнаете, что в определённых ситуациях математика предлагает вам совсем другие подходы к вычислению вероятностей случайных событий.

В нашей стране имеют давнюю традицию и международный авторитет разнообразные математические соревнования школьников — олимпиады, конкурсы, турниры. О самых известных из них рассказывается в начале каждой главы.

На уроках математики вы учитесь мыслить, рассуждать, анализировать, подмечать закономерности, строить алгоритмы, искать пути решения проблем. Вы учитесь яснее и чётче выражать свои мысли, быть убедительными в рассуждениях и доказательными в выводах. А ещё вы получаете примеры того, как можно знания, полученные вами на уроках математики, применять в повседневной жизни. Такая тренировка ума, развитие своих умственных способностей необходимы каждому человеку, чем бы он в жизни ни занимался.

Желаем вам успеха!

РУБРИКИ НА СТРАНИЦАХ УЧЕБНИКА

На страницах учебника вы увидите специальные знаки, которые помогут вам в работе с текстом.

«ВНИМАНИЕ!» Так выделяется утверждение, которое нужно запомнить.

«В ФОКУСЕ». Важная деталь, на которую полезно обратить внимание.

«МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БЛОКНОТ». Небольшой фрагмент на полях, который содержит дополнительную информацию.

«ЗАПИСЫВАЕМ РЕШЕНИЕ». Примеры решений некоторых задач.

«СПРАВКА». Содержит полезный справочный материал.

1 Так обозначены упражнения полегче.

10 Так обозначены упражнения потруднее.

ГЛАВА 1

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДРОБИ

- ЧТО ТАКОЕ АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ДРОБЬ
- ОСНОВНОЕ СВОЙСТВО ДРОБИ
- СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДРОБЕЙ
- УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДРОБЕЙ. ВСЕ ДЕЙСТВИЯ С АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ДРОБЯМИ
- СТЕПЕНЬ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ
- СВОЙСТВА СТЕПЕНИ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ
- РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ И ЗАДАЧ

Узнайте больше

- ВЫДЕЛЕНИЕ ЦЕЛОЙ ЧАСТИ ИЗ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ДРОБИ

МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Математические турниры ведут свою историю из глубины веков, а вот традиция математических соревнований для школьников по решению трудных, нестандартных задач восходит к первой такой олимпиаде, проведённой в 1894 году в Венгрии.

В нашей стране математические олимпиады школьников проводят с 30-х годов XX века. Первая состоялась в 1934 году в Ленинграде по инициативе известного математика Бориса Делоне. А уже на следующий год инициативу подхватили московские учёные, причём, помимо олимпиад, в столице в те же годы возникли математические кружки для школьников, а позже стали выпускать и серию книг «Библиотека математического кружка».

С тех пор при активном участии Московского математического общества и механико-математического факультета Московского государственного университета Московская математическая олимпиада проходит ежегодно, её проводили даже в годы Великой Отечественной войны.

Олимпиада стала праздником математиков разных поколений — школьников, студентов, которые сами ещё недавно принимали в ней участие, руководителей кружков, молодых учёных, преподавателей и профессоров вузов.

Многие победители Московской математической олимпиады впоследствии стали известными учёными, однако основная цель олимпиад не в том, чтобы выявить победителей, а в том, чтобы заинтересовать всех участников оригинальными задачами, привлечь школьников к занятиям в математических кружках, к самостоятельной работе с книгой.

1.1 ЧТО ТАКОЕ АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ДРОБЬ

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Что называют алгебраической дробью.
- Какие числа не входят в множество допустимых значений алгебраической дроби.

Алгебраические дроби занимают такое же место в множестве алгебраических выражений, что и дроби в множестве рациональных чисел. Вы знаете, что сумма, разность и произведение целых чисел также являются целыми числами, но для того чтобы всегда можно было найти частное целых чисел (кроме деления на нуль), уже нужны дроби. Аналогично и с алгебраическими дробями: сумма, разность, произведение многочленов есть многочлен, но когда речь идёт о делении многочленов, возникает потребность в алгебраических дробях.

О ДЕЛЕНИИ МНОГОЧЛЕНОВ В множестве рациональных чисел частное выражается дробью, числитель которой равен делимому, а знаменатель — делителю, причём в некоторых случаях, когда числитель делится на знаменатель, эта дробь равна целому числу:

$$7 : 10 = \frac{7}{10}; \qquad -4 : 18 = \frac{-4}{18} = -\frac{2}{9}; \qquad 24 : (-6) = \frac{24}{-6} = -4.$$

Похожим образом обстоит дело и с многочленами. Возьмём, например, многочлены $a^2 - 1$ и $a + 1$. По смыслу действия деления $(a^2 - 1) : (a + 1) = a - 1$, так как $(a - 1)(a + 1) = a^2 - 1$. Вы видите, что частное многочленов $a^2 - 1$ и $a + 1$ является многочленом. В таких случаях говорят, что многочлен $a^2 - 1$ **делится** на многочлен $a + 1$.

А многочлен $a^2 + 1$ **не делится** на многочлен $a + 1$. Это можно доказать. Для этого надо убедиться в том, что не существует такого многочлена, который в произведении с двучленом $a + 1$ давал бы $a^2 + 1$. Воспользуемся методом рассуждения от противного. Допустим, что такой многочлен A существует: $A(a + 1) = a^2 + 1$. Если в это равенство вместо a подставлять любые числа, то каждый раз должно получаться верное числовое равенство. Но при $a = -1$ левая часть равна нулю, а правая равна 2. Мы пришли к противоречию, следовательно, наше предположение неверно, а значит, $a^2 + 1$ не делится на многочлен $a + 1$.

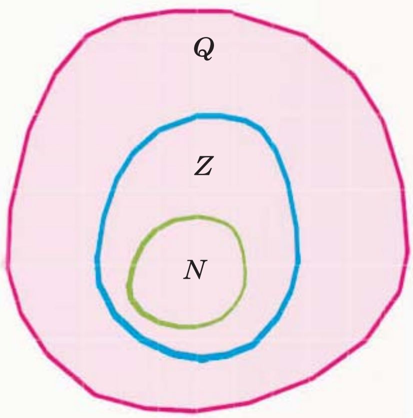
Обозначения числовых множеств:

N — множество натуральных чисел.

Z — множество целых чисел.

Q — множество рациональных чисел.

Множество Q рациональных чисел состоит из целых и дробных чисел.



АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДРОБИ Чтобы существовало частное любых двух многочленов (кроме деления на *нулевой многочлен*), будем рассматривать дроби вида $\frac{P}{Q}$, где P и Q — многочлены и $Q \neq 0$, т. е. не является нулевым многочленом. Такие дроби будем называть **алгебраическими** (их также называют *рациональными*). Вот несколько примеров:

$$\frac{xy - 2}{xy + 1}; \qquad \frac{a^2 + 1}{a + 1}; \qquad \frac{6}{23}.$$

Нулевой многочлен — это многочлен, который обращается в нуль при любых значениях входящих в него переменных. Например:

$$a - a, \ 2m - m - m, \ -3ax^2 + 3a \cdot x \cdot x$$

Обратите внимание: числовые дроби, такие, как $\frac{6}{23}$, являются одновременно и алгебраическими, поскольку (как мы говорили в 7 классе) числа — это тоже многочлены.

Алгебраическую дробь $\frac{P}{Q}$ считают *частным от деления многочлена P на многочлен Q*:

$$\frac{P}{Q} = P : Q.$$

Например, $\frac{ab + c}{ab - c} = (ab + c) : (ab - c)$.

Любое целое число можно записать в виде дроби со знаменателем, равным 1:

$$-15 = \frac{-15}{1}.$$

Точно так же любой многочлен можно записать в виде дроби со знаменателем, равным 1:

$$ax^2 - 3a^2x = \frac{ax^2 - 3a^2x}{1}.$$

ДОПУСТИМЫЕ ЗНАЧЕНИЯ Переменные в алгебраической дроби, как и в любом алгебраическом выражении, можно заменять числами. Однако не любые числа могут быть *допустимыми значениями переменных* в алгебраической дроби, т. е. такими, при которых дробь имеет смысл. Важно помнить:

! в алгебраическую дробь нельзя подставлять числа, которые обращают её знаменатель в нуль.

Пример. Найдём значения переменной, при которых дробь $\frac{a - 5}{2a + 7}$ имеет смысл. Для этого сначала определим те значения a, при которых знаменатель дроби равен нулю: $2a + 7 = 0$; $2a = -7$; $a = -3{,}5$.

Итак, при $a = -3{,}5$ дробь не имеет смысла. Теперь легко определить числа, которые составляют *множество допустимых значений переменных* этой дроби: это все числа, кроме $-3{,}5$.

В таблице приведено несколько алгебраических дробей и для каждой из них указано *множество допустимых значений переменных*:

Дробь	$\frac{1}{a^2}$	$\frac{x - 1}{3x + 6}$	$\frac{6}{y^2 - 9}$	$\frac{c - 5}{c^2 + 2}$
Множество допустимых значений переменных	Все числа кроме 0	Все числа кроме -2	Все числа кроме 3 и -3	Все числа

Понятие дроби связано с делением. Если разделить, например, 1 на n равных частей, то полученной части будет соответствовать дробь $\frac{1}{n}$. Увеличивая n, мы будем получать всё меньшие и меньшие числа:

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots > \frac{1}{10} > \dots > \frac{1}{100} > \dots > \frac{1}{1\,000\,000} > \dots$$

Этот процесс бесконечен: даже при очень большом натуральном n всегда можно взять n на 1 больше и получить меньшую дробь. Так можно бесконечно приближаться к нулю, не достигая его и получая бесконечно малые числа.

Эта же дробь поможет получать и бесконечно большие числа. Если вместо n подставлять дроби $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ..., $\frac{1}{10}$, ..., $\frac{1}{100}$, ..., $\frac{1}{1\,000\,000}$, ..., то в результате будут получаться

$$2, 3, \dots, 10, \dots, 100, \dots, 1\,000\,000, \dots,$$

и т. д. до бесконечности.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Приведите два примера деления целых чисел: когда частное является целым числом и когда дробным.
- Рассуждая так же, как это делается в тексте, докажите, что $(a - 2)^2$ делится на $a - 2$ и не делится на $a + 2$.
- Запишите выражение
  $$(x - 7) : (x + 3)$$
  с помощью дробной черты. Как называют полученное выражение?
- Какие числа нельзя подставлять вместо букв в алгебраическую дробь? Входит ли в множество допустимых значений дроби $\frac{2m^2}{m + 3}$ число: 0; -3; 3?

УПРАЖНЕНИЯ

ВЫПОЛНЯЕМ ВЫЧИСЛЕНИЯ, НАХОДИМ МНОЖЕСТВО ДОПУСТИМЫХ ЗНАЧЕНИЙ

1 Запишите в виде дроби частное двух многочленов:
а) $2a$ и $a + b$; б) $a - c$ и $3a^2$; в) $2x^2 + x - 1$ и $x^2 + 1$; г) $x - 5$ и $2x - 6$.

2 Составьте какое-нибудь выражение, которое делится на каждое из данных выражений:
а) xy, yz; б) a^2b, ab^2, abc; в) $m - n$, $m + n$; г) $5(p - q)$, $5(p - q)$, $(p - q)^2$.

3 Найдите значение дроби при указанных значениях переменных:

а) $\frac{a - c}{a + c}$ при $a = 0{,}7$, $c = -1{,}7$; в) $\frac{xy}{x - y}$ при $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{2}$;
б) $\frac{3m + 2n}{m - n}$ при $m = -0{,}4$, $n = 0{,}6$; г) $\frac{a^2 + b^2}{ab}$ при $a = -2$, $b = 5$.

4 Подберите значения a, при которых значение выражения $\frac{1}{a}$ является:
а) положительным дробным числом, меньшим 1; б) дробным числом, бóльшим 1; в) целым числом, бóльшим 1; г) отрицательным целым числом, меньшим -10.

5 Известно, что $a + b = 1$ и $a - b = \frac{1}{3}$. Найдите значения выражений:
$\frac{a - b}{a + b}$, $\frac{a + b}{b - a}$, $\frac{(a - b)^2}{(a + b)^2}$, $\frac{(a + b)^2}{(a - b)^2}$.

6 Найдите значение выражения:

а) $\frac{x^2 - xy + y^2 - (x - y)^2}{x - y}$ при $x = 0{,}3$ и $y = 0{,}5$;

б) $\frac{a - 4}{(a + b)^2 - (a - b)^2}$ при $a = \frac{2}{3}$ и $b = -\frac{3}{4}$;

в) $\frac{(c + x)^2 - 4cx}{c + x}$ при $c = 0{,}74$ и $x = -0{,}26$;

г) $\frac{mn}{2(m - n)(m + n) - (m - n)^2 + 4n^2}$ при $m = -1$ и $n = 11$.

Найдите допустимые значения переменных для дроби (№ 7–8):

7 а) $\frac{a + 3}{a}$; б) $\frac{x - 2}{x - 4}$; в) $\frac{y^2 - 1}{2y}$; г) $\frac{n + 2}{10}$; д) $\frac{3a}{2a - 5}$; е) $\frac{x}{x^2 - 1}$.

8 а) $\frac{(a - 3)(a + 2)}{a(a - 1)}$; б) $\frac{5x}{(x + 2)(2x - 6)}$; в) $\frac{2c - 7}{2c^2 + 8c}$; г) $\frac{a}{a^2 - 16}$; д) $\frac{n + 1}{n^2 - 6n + 9}$.

9 Используя данные выражения, составьте две дроби и найдите допустимые значения переменной для каждой из них: а) $a^2 + 1$ и $a - 1$; б) $(a + 2)^2$ и $a^2 + 2$.

10 Соотнесите каждое выражение с множеством его допустимых значений:

А) $\frac{x - 3}{(x - 2)(x - 1)}$; Б) $\frac{(x - 2)(x - 1)}{x - 3}$; В) $\frac{2x^2}{x^2 + 2}$; Г) $\frac{x^2 + 2}{2x^2}$.

1) $x \neq 0$; 2) $x \neq 3$; 3) $x \neq 1$; $x \neq 2$; 4) x — любое число.

11 Подберите несколько пар значений переменных, при которых выражение не имеет смысла:

а) $\frac{a + b}{a - b}$; б) $\frac{x - y}{xy}$; в) $\frac{ab}{(a - 1)(b - 2)}$; г) $\frac{2x}{xy + 24}$.

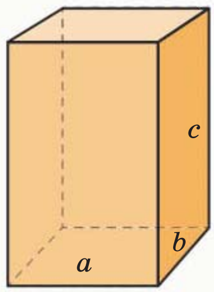
ПРИМЕНЯЕМ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДРОБИ

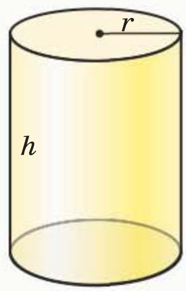
12 **МАТЕМАТИКА ВОКРУГ НАС** Из формулы скорости равноускоренного движения $v = v_0 + at$, где v_0 — начальная скорость, a — ускорение, t — время движения, выразите a и t. Используя нужную формулу, определите:
а) какое ускорение развил автомобиль, если для обгона автобуса на трассе он за 2,5 минуты увеличил скорость с 60 км/ч до 90 км/ч; б) какое время понадобится велосипедисту, чтобы увеличить скорость с 15 км/ч до 24 км/ч, если он поедет с ускорением 10 м/мин^2.
Подсказка. Выразите скорости в метрах в минуту.

13 а) За t мин пловец проплыл по течению реки l м. Скорость течения реки u м/мин. Составьте выражение для вычисления собственной скорости спортсмена и найдите её, если $l = 900$, $t = 15$, $u = 20$.
б) За какое время моторная лодка пройдёт s км против течения реки, если собственная скорость лодки v км/ч, скорость течения реки u км/ч? Составьте выражение и найдите время, если: $s = 30$, $v = 12$, $u = 3$; $s = 9$, $v = 15$, $u = 3$.

14 Выразите из формулы:
а) $l' = l(1 + \alpha\tau)$ переменные l и τ; б) $Q = cm(t_2 - t_1)$ переменные m, t_2 и t_1.

15 а) Площадь поверхности параллелепипеда можно найти по формуле $S = 2(ab + bc + ac)$. Выразите из этой формулы высоту параллелепипеда c; длины основания a и b.
б) Площадь поверхности прямого кругового цилиндра можно найти по формуле $S = 2\pi r(r + h)$. Выразите из этой формулы высоту цилиндра h.





16

ЗАДАЧА-ИССЛЕДОВАНИЕ

1) Сравните значения выражения $\frac{a + b}{ab}$ при $a = -20$, $b = 5$ и при $b = -20$, $a = 5$. Какую особенность вы заметили?

2) Поменяйте в данном выражении местами переменные: подставьте b вместо a и a вместо b. Изменилось ли что-либо — получилось ли выражение, не равное исходному?

3) Такие выражения имеют специальное название, их называют *симметрическими*. Если рассматривать, например, выражения с двумя переменными, пусть это будут a и b, то симметрическим является выражение, которое не меняется при подстановке a вместо b и b вместо a.
Какие из следующих выражений являются симметрическими и какие не являются: $a^2 + b^2$; $a^2 - b^2$; $a^2 - ab + b^2$; $a^2 - ab - b^2$; $\frac{a^2 + b^2}{a}$; $\frac{a^3 + b^3}{ab}$?
Придумайте сами примеры симметрических выражений с двумя переменными.

1.2 ОСНОВНОЕ СВОЙСТВО ДРОБИ

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Как сокращать дроби.
- Как приводить дроби к новому знаменателю.

Правила действий с алгебраическими дробями основываются на правилах арифметических действий с обыкновенными дробями. Буквы в алгебре — обобщённые обозначения конкретных чисел, законы алгебры соответствуют законам арифметики. И поэтому естественно, что действия с алгебраическими дробями, любые преобразования этих дробей проводятся по тем же правилам, что и действия с обыкновенными дробями.

Основное свойство обыкновенной дроби позволяет получить сколько угодно равных между собой дробей:

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{5}{10}=\frac{12}{24}=\ldots.$$

По своей форме записи всё это *разные* дроби, которые тем не менее представляют *одно и то же* рациональное число. Обычно оно имеет «имя», которое носит единственная в этом множестве равных дробей несократимая дробь. В данном случае это «одна вторая».

ОСНОВНОЕ СВОЙСТВО ДРОБИ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ Из арифметики вам известно основное свойство обыкновенной дроби:

если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получится дробь, равная данной.

Например, $\frac{2}{7}=\frac{2\cdot12}{7\cdot12}=\frac{24}{84}$; $\frac{54}{153}=\frac{6\cdot9}{17\cdot9}=\frac{6}{17}$.

Аналогичное свойство справедливо и для алгебраических дробей. И называется оно аналогичным образом — *основное свойство алгебраической дроби*.

! Если числитель и знаменатель алгебраической дроби умножить или разделить на один и тот же ненулевой многочлен, то получится дробь, равная данной:

$$\frac{A}{B}=\frac{A\cdot C}{B\cdot C},\ \text{где } C\neq0.$$

Как и в арифметике, основное свойство алгебраической дроби используется для приведения дробей к новому знаменателю, для сокращения дробей.

Пример 1. Приведём дробь $\frac{a-b}{a+b}$ к знаменателю $2(a^2-b^2)$.

Так как $2(a^2-b^2)=2(a-b)(a+b)$, то новый знаменатель отличается от исходного множителем $2(a-b)$.

Значит, надо умножить числитель и знаменатель дроби $\frac{a-b}{a+b}$ на дополнительный множитель $2(a-b)$. Получим

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{(a-b)\cdot2(a-b)}{(a+b)\cdot2(a-b)}=\frac{2(a-b)^2}{2(a^2-b^2)}.$$

Пример 2. Сократим дробь $\frac{x^2y+x}{x^2y}$.

Разложим числитель дроби на множители и выделим в числителе и знаменателе общий множитель; затем разделим числитель и знаменатель на этот общий множитель:

$$\frac{x^2y+x}{x^2y}=\frac{x(xy+1)}{x^2y}=\frac{x(xy+1)}{x\cdot xy}=\frac{xy+1}{xy}.$$

Дальнейшее сокращение дроби невозможно.

Приведём дробь $\frac{y}{x^2-xy}$ к знаменателю $x(x^2-y^2)$.

Решение:

$x(x^2-y^2)=x(x-y)(x+y)$

$$\frac{y}{x^2-xy}=\frac{y^{\,x+y}}{x(x-y)}=$$

$$=\frac{y(x+y)}{x(x-y)(x+y)}=\frac{xy+y^2}{x(x^2-y^2)}.$$

Сократим дробь $\frac{x^2+xy}{xy^2+x^2y}$.

Решение:

$$\frac{x^2+xy}{xy^2+x^2y}=\frac{\overset{1}{\cancel{x}}\overset{1}{\cancel{(x+y)}}}{\underset{1}{\cancel{x}}y\underset{1}{\cancel{(x+y)}}}=\frac{1}{y}.$$

ПЕРЕМЕНА ЗНАКА В ЧИСЛИТЕЛЕ ИЛИ ЗНАМЕНАТЕЛЕ ДРОБИ

Из основного свойства алгебраической дроби вытекает важное следствие, которое часто используется при преобразовании дробей. А именно: если числитель и знаменатель дроби умножить на (−1), то получится дробь, равная данной: $\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B}$.

Дробь $\frac{-A}{-B}$ можно преобразовать, поставив один из минусов перед дробью. Поэтому

$$\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B} = -\frac{A}{-B} = -\frac{-A}{B}.$$

Если числитель и знаменатель дроби заменить противоположными выражениями, то получится дробь, равная данной;
если числитель или знаменатель дроби заменить противоположным выражением и при этом поменять знак перед дробью, то получится дробь, равная данной.

Этими равенствами часто пользуются из соображений эстетики: лучше воспринимаются дроби, у которых числитель или знаменатель не начинаются со знака «минус».

Пример 3. Преобразуем дробь $\frac{-a+2b}{-a-2}$, заменив её числитель и знаменатель на противоположные:

$$\frac{-a+2b}{-a-2} = \frac{a-2b}{a+2}.$$

Пример 4. Сократим дробь $\frac{x^2-9}{3x-x^2}$.

Разложим числитель и знаменатель дроби на множители:

$$\frac{x^2-9}{3x-x^2} = \frac{(x-3)(x+3)}{x(3-x)}.$$

Множители $x - 3$ и $3 - x$ «почти одинаковы» — они различаются только знаками. Заменим любой из них, например $3 - x$, на противоположное выражение. При этом поставим знак «минус» перед дробью:

$$\frac{(x-3)(x+3)}{x(3-x)} = -\frac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)} = -\frac{x+3}{x}.$$

Здесь нет смысла вносить минус в числитель или знаменатель дроби, так как это не упростит вид выражения и не украсит его.

Пример 5. Заменим выражение $-\frac{a-4}{a-2}$ равным ему, убрав перед дробью знак «минус».

Здесь можно поступить по-разному — изменить на противоположный знак числителя или знак знаменателя:

$$-\frac{a-4}{a-2} = \frac{-(a-4)}{(a-2)} = \frac{4-a}{a-2};$$

$$-\frac{a-4}{a-2} = \frac{(a-4)}{-(a-2)} = \frac{a-4}{2-a}.$$

Запишем выражения, равные дроби $\frac{a-x}{a-y}$, поменяв всеми возможными способами знаки:

$$\frac{a-x}{a-y} = \frac{x-a}{y-a} = -\frac{x-a}{a-y} = -\frac{a-x}{y-a}.$$

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Сформулируйте основное свойство обыкновенной дроби; примените его для приведения дроби $\frac{9}{14}$ к знаменателю 70, для сокращения дроби $\frac{30}{105}$.
- Сформулируйте основное свойство алгебраической дроби. Какие преобразования алгебраической дроби выполняют на основе этого свойства?
- Приведите дробь из примера 1 к знаменателю $ab + b^2$.
- Сократите дробь $\frac{ab^2}{ab^2-b}$, действуя по тому же плану, что в примере 2.
- Дополните равенство $\frac{a-b}{a-c} = -\frac{\ldots}{a-c}$. Каким правилом вы воспользовались?

УПРАЖНЕНИЯ

ПРИМЕНЯЕМ ОСНОВНОЕ СВОЙСТВО ДРОБИ

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

17 Приведите дробь:

а) $\frac{a + b}{ab}$ к знаменателю $5ab$; a^2b^2; a^2b; $-ab^3$;

б) $\frac{x}{x - y}$ к знаменателю $x^2 - xy$; $x^2 - y^2$;

в) $\frac{m - 2}{m + 2}$ к знаменателю $(m + 2)^2$; $2m^2 + 4m$.

Сократите дробь (№ 18–21):

18 а) $\frac{7xy^2}{21xy}$; б) $\frac{2a^2b}{12ab^2}$; в) $\frac{xyz}{x^2z^2}$; г) $\frac{16mn^3}{24m^2n^2}$; д) $\frac{ab^3c^4}{a^4b^3c}$.

19 а) $\frac{3a - 3b}{9a}$; б) $\frac{4x - 2y}{2y}$; в) $\frac{4a + 6c}{2c}$; г) $\frac{5x + 5y}{5x - 5y}$; д) $\frac{15b - 5c}{5b - 5c}$.

20 а) $\frac{xy}{xy + x}$; б) $\frac{ab + ac}{abc}$; в) $\frac{m^2n - mn}{mn}$; г) $\frac{6ab}{6a^2b - 18ab}$; д) $\frac{3xyz}{3x^2z + 6xz}$.

21 а) $\frac{5x^2}{x^4 - x^2}$; б) $\frac{a^3 + a^5}{1 + a^2}$; в) $\frac{y^5 - y^4}{y^5}$; г) $\frac{b^4 - b^3}{b^5}$; д) $\frac{c^2 - c + 1}{c^4 - c^3 + c^2}$.

Разложите на множители числитель и знаменатель дроби и сократите её (№ 22–28):

22 а) $\frac{ax - ay}{bx - by}$; б) $\frac{a^2 - 2a}{ab - 2b}$; в) $\frac{c^2 - c}{c^2 + c}$; г) $\frac{x^2 + xy}{xy + y^2}$; д) $\frac{ax^3 - a^2}{ax^3 + a^2}$.

23 а) $\frac{a^2 - x^2}{ax - x^2}$; б) $\frac{5x^2 - 10x}{x^2 - 4}$; в) $\frac{ab - ac}{b^2 - 2bc + c^2}$; г) $\frac{2xy - 6x}{y^2 - 6y + 9}$; д) $\frac{5x - 25}{x^2 - 10x + 25}$.

24 а) $\frac{a^2b - ab^2}{a^2 - ab}$; б) $\frac{3xy + 9x}{xy^2 + 3xy}$; в) $\frac{a(a^2 - b^2)}{a^2b + ab^2}$; г) $\frac{4m - 2m^2}{4n - 2mn}$; д) $\frac{ax^2 - bx^2}{x(a^2 - b^2)}$.

25 а) $\frac{a^2 - b^2}{(a + b)^2}$; б) $\frac{(a - b)^2}{a^2 - b^2}$; в) $\frac{a^2 - 16}{a^2 + 8a + 16}$; г) $\frac{a^2 - 10a + 25}{a^2 - 25}$.

26 а) $\frac{a^3 - ab^2}{a^2 - ab}$; б) $\frac{6x^2 + 12x}{2x^2 - 8}$; в) $\frac{3m^2 - 6mn + 3n^2}{6m - 6n}$; г) $\frac{c^3 - c}{c^2 - c}$; д) $\frac{ay^2 + a^2y}{a^3y - ay^3}$.

27 а) $\frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}$; б) $\frac{(a + b)^2}{a^3 + b^3}$; в) $\frac{a^2 - b^2}{(a - b)^2(a + b)^2}$; г) $\frac{(a + b)^2(a - b)^2}{a^4 - b^4}$.

28 а) $\frac{am + an}{am - bm + an - bn}$; г) $\frac{ab + ac - bx - cx}{ax + ay - x^2 - xy}$;

б) $\frac{ac + a}{ac + 1 + a + c}$; д) $\frac{a + b + c}{a^2 + 2ab + b^2 - c^2}$;

в) $\frac{mn + pq - mq - pn}{mn - mq}$; е) $\frac{x^2 + y^2 + 2xy - c^2}{x^2 - y^2 - c^2 - 2yc}$.

29 МАТЕМАТИКА ВОКРУГ НАС а) Упаковка для теннисных мячей имеет цилиндрическую форму. В неё укладываются три теннисных мяча так, что они касаются друг друга, крышек и стенок футляра (*рис. 1.1*). Какую часть объёма футляра занимают мячи?

Подсказка. Формула объёма шара: $V = \frac{4\pi r^3}{3}$ (r — радиус шара); формула объёма цилиндра: $V = \pi r^2 h$ (r — радиус основания цилиндра, h — его высота).

Для ответа на вопрос выразите высоту h через радиус r.

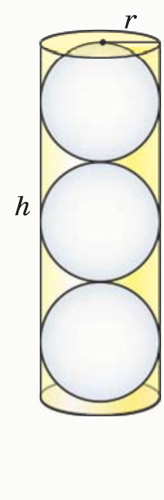


Рис. 1.1

б) В коробку уложены 3 банки цилиндрической формы с консервами так, что они касаются друг друга и стенок коробки (*рис. 1.2*). Какую часть объёма коробки занимают банки? Выразите ответ обыкновенной дробью, считая $\pi \approx 3$.

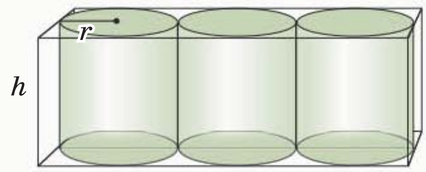


Рис. 1.2

ПЕРЕМЕНА ЗНАКА В ЧИСЛИТЕЛЕ ИЛИ ЗНАМЕНАТЕЛЕ ДРОБИ

30 Какие из следующих выражений равны дроби $\frac{x}{y}$?

1) $\frac{-x}{-y}$; 2) $-\frac{-x}{-y}$; 3) $-\frac{-x}{y}$; 4) $-\frac{x}{y}$; 5) $-\frac{x}{-y}$.

31 Замените выражение равным ему, убрав перед дробью знак «минус»:

а) $-\frac{a-x}{a-y}$; б) $-\frac{-x-5}{x+3}$; в) $-\frac{2x^2}{x-y}$; г) $-\frac{(1-y)(2-y)}{y-3}$; д) $-\frac{(x+y)(y-z)}{2(x-y)(x-z)}$.

Подсказка. В качестве образца воспользуйтесь примером 5 из текста.

32 Замените выражение равным ему, поставив перед дробью знак «минус»:

а) $\frac{mn}{m-n}$; б) $\frac{a-3}{a}$; в) $\frac{-x-y}{1-y}$; г) $\frac{a-b}{a+c}$; д) $\frac{9-x^2}{x-3}$; е) $\frac{m+n}{m+5}$.

33 Среди данных дробей найдите те, которые равны дроби $\frac{a-c}{a+b}$; запишите соответствующие равенства.

$\frac{c-a}{a+b}$; $-\frac{a-c}{a-b}$; $\frac{a-c}{-a-b}$; $-\frac{a-c}{a+b}$;

$\frac{-c-a}{a+b}$; $-\frac{c-a}{-a-b}$; $\frac{c-a}{-a-b}$; $\frac{c-a}{a-b}$.

Сократите дробь (№ 34–36):

34 а) $\frac{c^2(c-5)}{c(5-c)}$; б) $\frac{a^2(b-a)}{ab(a-b)}$; в) $\frac{x(x-3)^2}{y(3-x)^2}$; г) $\frac{a^2c(a-c)}{ac(c-a)^2}$.

35 а) $\frac{5a^2-10ab}{2b^2-ab}$; в) $\frac{x^2-y^2}{(y-x)^2}$; д) $\frac{a^2-2a}{4-4a+a^2}$; ж) $\frac{b^3-b}{b-b^2}$;

б) $\frac{ay-ax}{5x-5y}$; г) $\frac{a-a^2}{a^2-1}$; е) $\frac{x^2-2xy+y^2}{y^2-xy}$; з) $\frac{a^2n-n^3}{n^2-an}$.

36 а) $\frac{a(x-y)-b(y-x)}{(a-b)(y-x)}$; б) $\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{(a-p)(b-p)(c-p)}$; в) $\frac{(a+b-c)(a-b)}{(c-a-b)(a-c)}$.

Неверно! Учащиеся 8 класса выполняли самостоятельную работу на сокращение дробей. Ниже показано, как начали преобразования Артём (А), Берта (Б) и Вадим (В). Правильно ли сделал первые шаги каждый из них? Если нет, то исправьте ошибки. Доведите каждое решение до конца.

А) $\frac{(2x-2y)^2}{8x-8y} = \frac{2(x-y)^2}{8(x-y)} = \ldots$

Б) $\frac{3a^2-3b^2}{(3b-3a)^2} = -\frac{3a^2-3b^2}{(3a-3b)^2} = \ldots$

В) $\frac{2m^2-2mn}{(n-m)^3} = \frac{2m(m-n)}{(m-n)^3} = \ldots$

1.3 СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДРОБЕЙ

ВЫ ВСПОМНИТЕ:

- Как складывают и вычитают обыкновенные дроби.

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Как приводить к общему знаменателю алгебраические дроби.
- Правила сложения и вычитания алгебраических дробей.
- Как применять эти правила в ходе преобразований.

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad}{cd} + \frac{bc}{cd} = \frac{ad+bc}{cd}$$

Вы знаете, что с обыкновенными дробями можно выполнять арифметические действия. Точно так же можно выполнять действия и с алгебраическими дробями. При этом правила выполнения действий одинаковы. И если вы хорошо умеете складывать и вычитать обыкновенные дроби, то легко научитесь делать это с алгебраическими дробями.

ПРАВИЛА СЛОЖЕНИЯ И ВЫЧИТАНИЯ ДРОБЕЙ Правила сложения и вычитания алгебраических дробей аналогичны соответствующим правилам действий с обыкновенными дробями.

> **!**
> - Чтобы сложить (вычесть) дроби с одинаковыми знаменателями, нужно сложить (вычесть) их числители, а знаменатель оставить тем же.
> - Если дроби имеют разные знаменатели, то их нужно привести к общему знаменателю и затем воспользоваться первым правилом.

Рассмотрим примеры применения этих правил.

ДРОБИ С ОДИНАКОВЫМИ ЗНАМЕНАТЕЛЯМИ

Пример 1. Найдём сумму дробей $\frac{a+x}{ax}$ и $\frac{a-x}{ax}$.

$$\frac{a+x}{ax} + \frac{a-x}{ax} = \frac{(a+x)+(a-x)}{ax} = \frac{a+x+a-x}{ax} = \frac{2a}{ax} = \frac{2}{x}.$$

ДРОБИ С РАЗНЫМИ ЗНАМЕНАТЕЛЯМИ

Пример 2. Найдём разность дробей $\frac{a}{x+y}$ и $\frac{a}{x-y}$.

В качестве общего знаменателя дробей можно взять любое выражение, которое делится на каждый из знаменателей, в частности, всегда можно взять произведение знаменателей, что мы и сделаем в этом случае:

$$\frac{a}{x+y} - \frac{a}{x-y} = \frac{a(x-y)}{(x+y)(x-y)} - \frac{a(x+y)}{(x+y)(x-y)} = \frac{ax-ay-ax-ay}{(x+y)(x-y)} = \frac{-2ay}{x^2-y^2} = \frac{2ay}{y^2-x^2}.$$

Запись можно вести так, как в примере на полях.

Найдём сумму $\frac{x}{x-y} + \frac{x}{y}$.
Общий знаменатель: $y(x-y)$.

$$\frac{x^{\backslash y}}{x-y} + \frac{x^{\backslash x-y}}{y} = \frac{xy + x(x-y)}{y(x-y)} = \frac{xy+x^2-xy}{y(x-y)} = \frac{x^2}{xy-y^2}.$$

Пример 3. Представим в виде дроби выражение

$$\frac{a}{4bc} + \frac{b}{6ac}.$$

Часто при сложении и вычитании дробей можно найти более простой общий знаменатель, чем произведение знаменателей. Это именно такой случай.

Произведение знаменателей равно $4bc \cdot 6ac = 24abc^2$. Но существует более простое выражение, которое также является общим знаменателем данных дробей: $12abc$. Действительно, общий знаменатель должен делиться и на bc, и на ac, а для этого достаточно, чтобы каждая из переменных a, b и c входила в него в первой степени. В качестве коэффициента для простоты вычислений удобно взять наименьшее общее кратное чисел 4 и 6. Таким образом, получаем

$$\frac{a}{4bc} + \frac{b}{6ac} = \frac{a \cdot 3a + b \cdot 2b}{12abc} = \frac{3a^2 + 2b^2}{12abc}.$$

Пример 4. Найдём разность $\frac{a}{ab + b^2} - \frac{b}{a^2 + ab}$.

Сначала найдём общий знаменатель дробей и дополнительные множители.

Для этого разложим на множители знаменатели дробей:

$$ab + b^2 = b(a + b); \quad a^2 + ab = a(a + b).$$

Оба знаменателя делятся на $a + b$, понятно, что этот множитель должен быть и в общем знаменателе. Кроме того, последний должен делиться ещё на a и на b, поэтому в качестве общего знаменателя берём $ab(a + b)$. Дополнительным множителем для первой дроби является a, для второй b. Получим

$$\frac{a}{ab + b^2} - \frac{b}{a^2 + ab} = \frac{a}{b(a + b)} - \frac{b}{a(a + b)} =$$

$$= \frac{a \cdot a}{ab(a + b)} - \frac{b \cdot b}{ab(a + b)} = \frac{a^2 - b^2}{ab(a + b)}.$$

Полученную дробь можно сократить, поэтому продолжим преобразование:

$$\frac{a^2 - b^2}{ab(a + b)} = \frac{(a - b)(a + b)}{ab(a + b)} = \frac{a - b}{ab}.$$

На полях показано, как можно записать решение короче.

$$\frac{a}{ab + b^2} - \frac{b}{a^2 + ab} =$$

$$= \frac{a^{\backslash a}}{b(a + b)} - \frac{b^{\backslash b}}{a(a + b)} =$$

$$= \frac{a^2 - b^2}{ab(a + b)} = \frac{(a - b)\overset{1}{\cancel{(a + b)}}}{ab\underset{1}{\cancel{(a + b)}}} =$$

$$= \frac{a - b}{ab}$$

ДРОБЬ И МНОГОЧЛЕН

Пример 5. Упростим выражение $\frac{x^2}{x + 1} - x + 1$.

Заключим два последних слагаемых в скобки и запишем получившийся двучлен в виде дроби со знаменателем 1: $\frac{x^2}{x + 1} - x + 1 = \frac{x^2}{x + 1} - (x - 1) = \frac{x^2}{x + 1} - \frac{x - 1}{1}$.

Теперь приведём вторую дробь к знаменателю $x + 1$ и применим правило вычитания дробей с одинаковыми знаменателями:

$$\frac{x^2}{x + 1} - \frac{x - 1}{1} = \frac{x^2}{x + 1} - \frac{(x - 1)(x + 1)}{x + 1} = \frac{x^2 - (x^2 - 1)}{x + 1} =$$

$$= \frac{x^2 - x^2 + 1}{x + 1} = \frac{1}{x + 1}.$$

После того как вы накопите опыт, вы сможете записывать решение короче, пропуская некоторые шаги, например так, как показано в примере на полях.

$$\frac{a^2}{a - 2} - a + 1 =$$

$$= \frac{a^2}{a - 2} - (a - 1)^{\backslash (a - 2)} =$$

$$= \frac{a^2 - (a - 1)(a - 2)}{a - 2} = \ldots$$

Доведите до конца преобразование.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Сформулируйте правила сложения и вычитания дробей. Найдите разность $\frac{2x}{x - 1} - \frac{2x - 1}{x - 1}$. Каким правилом вы воспользовались?
- Прокомментируйте каждый шаг преобразования разности дробей в примере 2.
- Найдите самый простой общий знаменатель дробей: а) $\frac{a}{a + b}$ и $\frac{a}{b}$; б) $\frac{1}{2x^2y}$ и $\frac{1}{xy}$; в) $\frac{c}{b^2 - bc}$ и $\frac{1}{bc - c^2}$.
- Разберите пример 5 и найдите сумму выражений $\frac{x^2}{x + 1}$ и $x + 1$.

УПРАЖНЕНИЯ

ДРОБИ С ОДИНАКОВЫМИ ЗНАМЕНАТЕЛЯМИ

37 Найдите сумму или разность дробей:

а) $\frac{10}{17} - \frac{4}{17}$; б) $\frac{5}{6} + \frac{5}{6}$; в) $\frac{12x}{7} - \frac{5x}{7}$; г) $\frac{1}{3m} + \frac{5}{3m}$; д) $\frac{7c}{10a} - \frac{9c}{10a} - \frac{3c}{10a}$.

38 Выполните сложение или вычитание дробей:

а) $\frac{x + 3}{3} + \frac{3x}{3}$;

б) $\frac{a + b}{2c} - \frac{a - b}{2c}$;

в) $\frac{4a + 1}{3a - 3} - \frac{a + 1}{3a - 3}$;

г) $\frac{3a + 2b}{a + b} - \frac{2a + 3b}{a + b}$;

д) $\frac{c}{c^2 - 9} + \frac{3}{c^2 - 9}$;

е) $\frac{2mn}{m^2 - n^2} + \frac{m^2 + n^2}{m^2 - n^2}$;

ж) $\frac{x + a}{a - 5} - \frac{x + 5}{a - 5}$;

з) $\frac{k^2 + k}{k^2 - 9} - \frac{7k - 9}{k^2 - 9}$.

ДРОБИ С РАЗНЫМИ ЗНАМЕНАТЕЛЯМИ

39 Приведите дроби к общему знаменателю и выполните сложение или вычитание дробей:

а) $\frac{2a}{5} + \frac{3a}{2}$; б) $\frac{5}{b} + \frac{3b - 5}{b + 1}$; в) $\frac{x}{ab} - \frac{x}{c}$; г) $\frac{x}{x + y} - \frac{x - y}{x}$.

40 Найдите сумму и разность дробей: а) $\frac{1}{a - b}$ и $\frac{1}{a + b}$; б) $\frac{p + q}{p - q}$ и $\frac{p - q}{p + q}$.

Выполните действия (№ 41–42):

41

а) $\frac{2}{x} - \frac{1 + y}{xy}$;

б) $\frac{a + b}{a^2b} - \frac{a + b}{ab^2}$;

в) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{ab}$;

г) $\frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}$;

д) $\frac{x + y}{xy} - \frac{x + z}{xz} + \frac{y + z}{yz}$;

е) $\frac{3a + 1}{3a} + \frac{3a - b}{6ab} - \frac{2b + 1}{2b}$.

42

а) $\frac{2y}{3y + 3} + \frac{5y}{6y + 6}$;

б) $\frac{a}{ab + bc} + \frac{c}{cd + ad}$;

в) $\frac{x^2 + 25}{x^2 - 25} - \frac{x}{x + 5}$;

г) $\frac{a^2}{a^2 - 2a + 1} - \frac{a}{a - 1}$;

д) $\frac{x + y}{x - y} - \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$;

е) $\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} - \frac{a - b}{a + b}$.

43 Найдите дробь, которую надо сложить с дробью $\frac{m^2}{m^3 + 2m}$, чтобы получить $\frac{1}{m^2 + 2}$. Проверьте результат.

44 Найдите значение выражения при заданных значениях переменных:

а) $\frac{a^2}{ab - b^2} - \frac{b}{a - b}$ при $a = 2{,}5$; $b = -0{,}5$;

б) $\frac{2}{x^2 + xy} + \frac{2}{y^2 + xy}$ при $x = 0{,}25$; $y = 0{,}4$.

в) $\frac{a}{a - c} - \frac{2ac - c^2}{a^2 - ac}$ при $a = -100$; $c = -8$;

г) $\frac{1}{xy - x^2} - \frac{1}{y^2 - xy}$ при $x = -0{,}17$; $y = 100$.

45 Преобразуйте выражение в дробь:

а) $\frac{a}{ax - x^2} - \frac{a}{ax + x^2}$; б) $\frac{x + y}{x^2y - xy^2} - \frac{x - y}{x^2y + xy^2}$; в) $\frac{x + y}{xy - y^2} - \frac{4x}{x^2 - y^2}$.

Упростите выражение (№ 46–47):

46 а) $\frac{1+x}{1-x} + \frac{1-x}{1+x} - \frac{2x^2}{1-x^2}$; б) $\frac{1}{a+b} - \frac{2b}{a^2-b^2} - \frac{1}{a-b}$; в) $\frac{y-6}{y^2+3y} - \frac{y-3}{y} + \frac{y}{y+3}$.

47 а) $\frac{4}{x} + \frac{4}{x^2-x} - \frac{2}{x+1}$; б) $\frac{x+1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x}$; в) $\frac{1}{x+y} - \frac{x+y}{x^2-xy+y^2} + \frac{4xy}{x^3+y^3}$.

Выполните действия (№ 48–49):

48 а) $\frac{a}{a-1} - \frac{a-2}{1-a}$; в) $\frac{x^2}{x-3} + \frac{9}{3-x}$; д) $\frac{2x-1}{x-y} + \frac{x-1}{y-x}$;

б) $\frac{2b-5}{a-b} + \frac{b-5}{b-a}$; г) $\frac{a}{a^2-4} - \frac{2}{4-a^2}$; е) $\frac{2a+1}{2a-1} + \frac{3-2a}{1-2a}$.

Подсказка. Используйте равенства $\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B} = -\frac{A}{-B} = -\frac{-A}{B}$.

49 а) $\frac{4}{p^2-25} + \frac{2}{5p-p^2}$; г) $\frac{1}{a+b} - \frac{2}{b-a} - \frac{2a}{a^2-b^2}$;

б) $\frac{a^2}{(a-3)^2} + \frac{a}{3-a}$; д) $\frac{x}{4-x^2} - \frac{2+x}{2x-4} - \frac{2-x}{4+2x}$;

в) $\frac{x}{x-y} + \frac{x^2+y^2}{y^2-x^2} + \frac{x}{x+y}$; е) $\frac{a+1}{(a-1)^2} + \frac{2}{1-a^2} - \frac{1}{a+1}$.

50 Докажите, что верно равенство:

а) $\frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-c)(b-a)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)} = 0$;

б) $\frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \frac{1}{(a+2)(a+3)} = \frac{3}{a(a+3)}$.

Подсказка. б) Сначала сложите первую и вторую дроби, затем прибавьте третью.

ДРОБЬ И МНОГОЧЛЕН

Представьте выражение в виде дроби (№ 51–53):

51 а) $\frac{a}{b} - b$; б) $\frac{x}{c} - x$; в) $y - \frac{4}{y}$; г) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - 1$; д) $\frac{b}{c} - 2 + \frac{c}{b}$; е) $1 - \frac{2}{m} + \frac{1}{m^2}$.

52 а) $\frac{5y}{x-y} + 5$; в) $\frac{2c^2}{c-8} - 2c$; д) $4x - \frac{10x^2-2}{3x}$; ж) $\frac{15a^2}{3a-2} - 5a$;

б) $7 - \frac{7x}{x+y}$; г) $2m - \frac{mn-1}{n}$; е) $\frac{3a+1}{2a+1} - 1$; з) $2 - \frac{1+ab}{ab}$.

53 а) $2x - y - \frac{2x-y^2}{y}$; б) $\frac{a^2+b^2}{2a+b} + 2a - b$; в) $\frac{x^2+4}{x-2} - x - 2$; г) $6 + b - \frac{12b}{6+b}$.

54 Представьте дробь в виде суммы или разности многочлена и дроби:

а) $\frac{a^2}{a-1}$; б) $\frac{x^2}{x^2-1}$; в) $\frac{a^2+b^2}{a-b}$; г) $\frac{x^2+xy+y^2}{x+y}$.

Образец. $\frac{x^2}{x+1} = \frac{x^2-1+1}{x+1} = \frac{x^2-1}{x+1} + \frac{1}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$.

Неверно! Два восьмиклассника при выполнении самостоятельной работы допустили ошибки. Объясните, в чём заключается ошибка, и выполните преобразования правильно.

а) $\frac{a}{b} + a = \frac{a+a}{b} = \dots$;

б) $\frac{x^2}{x-1} - x - 1 = \frac{x^2-(x-1)(x-1)}{x-1} = \dots$

1.4 УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДРОБЕЙ. ВСЕ ДЕЙСТВИЯ С АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ДРОБЯМИ

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Правила умножения и деления алгебраических дробей.
- Как применяют эти правила в ходе преобразований.
- Как выполняют преобразования выражений с применением всех правил действий с алгебраическими дробями.

Найдём произведение и частное дробей $\frac{4}{x^2y}$ и $\frac{x}{2y}$.

1) $\frac{4}{x^2y}\cdot\frac{x}{2y} = \frac{\overset{2}{\cancel{4}}\cdot\overset{1}{\cancel{x}}}{\underset{x}{\cancel{x^2}}y\cdot\underset{1}{\cancel{2}}y} = \frac{2}{xy^2}$;

2) $\frac{4}{x^2y}:\frac{x}{2y} = \frac{4}{x^2y}\cdot\frac{2y}{x} = \frac{4\cdot 2\overset{1}{\cancel{y}}}{x^2\underset{1}{\cancel{y}}\cdot x} = \frac{8}{x^3}$.

Выполним деление:

$\frac{5a^2x}{6}:10axy$.

$\frac{5a^2x}{6}:10axy = \frac{5a^2x}{6}:\frac{10axy}{1} =$

$= \frac{5a^2x}{6}\cdot\frac{1}{10axy} = \frac{\overset{1}{\cancel{5}}\overset{a}{\cancel{a^2}}\overset{1}{\cancel{x}}}{6\cdot\underset{2}{\cancel{10}}\underset{1}{\cancel{a}}\underset{1}{\cancel{x}}y} = \frac{a}{12y}$.

Чтобы понять, как умножают и делят алгебраические дроби, достаточно вспомнить, как умножают и делят обыкновенные дроби: $\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{8} = \frac{4\cdot 3}{5\cdot 8} = \frac{1\cdot 3}{5\cdot 2} = \frac{3}{10}$. Деление сводится к умножению на дробь, обратную делителю: $\frac{3}{14}:\frac{2}{7} = \frac{3}{14}\cdot\frac{7}{2} = \frac{3\cdot 7}{14\cdot 2} = \frac{3\cdot 1}{2\cdot 2} = \frac{3}{4}$. Точно так же поступают и с алгебраическими дробями.

ПРАВИЛА УМНОЖЕНИЯ И ДЕЛЕНИЯ При умножении и делении алгебраических дробей применяются правила, аналогичные арифметическим.

> **!** Чтобы умножить дробь на дробь, нужно перемножить числители этих дробей и их знаменатели и первое произведение записать в числителе, а второе — в знаменателе:
>
> $$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D} = \frac{A\cdot C}{B\cdot D}.$$
>
> Чтобы разделить дробь на дробь, нужно делимое умножить на дробь, обратную делителю:
>
> $$\frac{A}{B}:\frac{C}{D} = \frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C}.$$

ПРИМЕРЫ УМНОЖЕНИЯ И ДЕЛЕНИЯ

Пример 1. Найдём произведение дробей $\frac{a^2-b^2}{2a}$ и $\frac{2ab}{ab-b^2}$.

$$\frac{a^2-b^2}{2a}\cdot\frac{2ab}{ab-b^2} = \frac{(a-b)(a+b)\cdot 2ab}{2a\cdot b(a-b)} = a+b.$$

Пример 2. Найдём частное $\frac{15x}{xy+y^2}:\frac{3x}{x+y}$.

$$\frac{15x}{xy+y^2}:\frac{3x}{x+y} = \frac{15x}{xy+y^2}\cdot\frac{x+y}{3x} = \frac{15x\cdot(x+y)}{y\cdot(x+y)\cdot 3x} = \frac{5}{y}.$$

Пример 3. Выполним умножение дроби $\frac{3m}{4n^2}$ на одночлен $8mn$.

Запишем одночлен в виде дроби со знаменателем 1, а затем применим правило умножения дробей:

$$\frac{3m}{4n^2}\cdot 8mn = \frac{3m}{4n^2}\cdot\frac{8mn}{1} = \frac{3m\cdot 8mn}{4n^2\cdot 1} = \frac{6m^2}{n}.$$

Пример 4. Разделим двучлен a^2+2a на дробь $\frac{a^2+4a+4}{a}$.

Как и в предыдущем примере, запишем двучлен в виде дроби со знаменателем, равным 1, а затем применим правило деления дробей:

$$(a^2 + 2a) : \frac{a^2 + 4a + 4}{a} = \frac{a(a + 2)}{1} : \frac{(a + 2)^2}{a} =$$
$$= \frac{a(a + 2)}{1} \cdot \frac{a}{(a + 2)^2} = \frac{a(a + 2) \cdot a}{1 \cdot (a + 2)^2} = \frac{a^2}{a + 2}.$$

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДРОБИ

Пример 5. Упростим выражение $\left(\frac{a - b}{b} + \frac{2a}{a - b}\right) \cdot \frac{a - b}{a^2 + b^2}$.

Преобразование такого рода выражений удобно выполнять по действиям. Сначала выполним действие в скобках — сложение дробей, затем выполним умножение:

1) $\frac{a - b}{b} + \frac{2a}{a - b} = \frac{(a - b)^2 + 2ab}{b(a - b)} = \frac{a^2 - 2ab + b^2 + 2ab}{b(a - b)} =$
$= \frac{a^2 + b^2}{b(a - b)}$;

2) $\frac{a^2 + b^2}{b(a - b)} \cdot \frac{a - b}{a^2 + b^2} = \frac{(a^2 + b^2)(a - b)}{b(a - b)(a^2 + b^2)} = \frac{1}{b}$.

Таким образом, $\left(\frac{a - b}{b} + \frac{2a}{a - b}\right) \cdot \frac{a - b}{a^2 + b^2} = \frac{1}{b}$.

Пример 6. Упростим выражение $\left(\frac{a}{a - b} - \frac{a}{a + b}\right)(a^2 - b^2)$.

Двучлен $a^2 - b^2$ делится на знаменатель каждой из дробей в скобках. Поэтому здесь можно действовать иначе, чем в предыдущем примере. А именно, сначала раскроем скобки, выполнив умножение на $a^2 - b^2$:

$$\left(\frac{a}{a - b} - \frac{a}{a + b}\right)(a^2 - b^2) = \frac{a(a^2 - b^2)}{a - b} - \frac{a(a^2 - b^2)}{a + b} =$$
$$= a(a + b) - a(a - b) = a(a + b - a + b) = 2ab.$$

Таким образом, $\left(\frac{a}{a - b} - \frac{a}{a + b}\right)(a^2 - b^2) = 2ab$.

Пример 7. Докажем, что выражение

$$(x^3 + 1) : \left(\frac{x^2}{x - 1} - 1\right) - 2x^2$$

может принимать только отрицательные значения.

Прежде всего упростим выражение, выполнив все нужные действия:

1) $\frac{x^2}{x - 1} - 1 = \frac{x^2 - (x - 1)}{x - 1} = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$;

2) $(x^3 + 1) : \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = \frac{(x + 1)(x^2 - x + 1)(x - 1)}{x^2 - x + 1} =$
$= x^2 - 1$;

3) $x^2 - 1 - 2x^2 = -x^2 - 1 = -(x^2 + 1)$.

Мы преобразовали данное выражение в равное ему выражение $-(x^2 + 1)$. Но $x^2 + 1$ принимает только положительные значения, значит, противоположное ему выражение $-(x^2 + 1)$ принимает только отрицательные значения. А значит, и равное ему исходное выражение при всех допустимых значениях x принимает только отрицательные значения.

Правила порядка выполнения действий в алгебре те же, что и в арифметике:

- если выражение не содержит скобок, то сначала выполняются действия умножения и деления в том порядке, как они записаны, а потом сложения и вычитания;
- если выражение содержит скобки, то сначала выполняются действия в скобках, при этом учитывается первое правило.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Сформулируйте правила умножения и деления алгебраических дробей и выполните умножение: $\frac{2}{a} \cdot \frac{6}{b}$; деление: $\frac{2}{a} : \frac{6}{b}$.
- Найдите:
  а) произведение $\frac{ax}{3y} \cdot 12xy$.
  б) частное $\frac{ax}{3y} : 12xy$.
  Прокомментируйте свои действия.
- Упростите выражение
  $$\left(\frac{x - y}{y} - \frac{x - y}{x}\right) \cdot \frac{xy}{x - y}$$
  двумя способами: выполнив преобразования по действиям; применив распределительное свойство умножения относительно сложения.

УПРАЖНЕНИЯ

ВЫПОЛНЯЕМ УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ ДРОБЕЙ

55 Выполните действия:

а) $\frac{a}{bc}\cdot\frac{c^3}{3a}$; б) $\frac{x^2}{y}:\frac{x}{2y}$; в) $\frac{x}{yz}\cdot\frac{y}{xz}$; г) $\frac{a^4}{b^3}:\frac{a^3}{b^2}$; д) $\frac{a^4b^2}{5xy}\cdot\frac{10x^3}{a^2b^2}$; е) $\frac{3mn}{2pq^2}:\frac{6m^2}{pq}$.

56 Как возводят дробь в степень? Выполните возведение в степень:

а) $\left(\frac{x^2}{y}\right)^3$; б) $\left(\frac{4}{bc^3}\right)^2$; в) $\left(\frac{a^2b}{cd^2}\right)^4$; г) $\left(\frac{x^4}{2y}\right)^3$; д) $\left(\frac{ax^3}{y^2}\right)^2$; е) $\left(-\frac{2}{m^2n}\right)^5$.

Выполните действия (№ 57–58):

57 а) $\frac{y}{x}\cdot\frac{x^2-xy}{y^2}$; б) $\frac{b^2}{2a}\cdot\frac{6a}{ab-b^2}$; в) $\frac{x}{5x+5y}\cdot\frac{x+y}{y}$; г) $\frac{a^2-ab}{b}\cdot\frac{a}{a-b}$; д) $\frac{a+1}{a}\cdot\frac{b}{a^2+a}$.

58 а) $\frac{ax-xy}{a}:\frac{a^2-ay}{x}$; б) $\frac{x}{x^2-y^2}:\frac{1}{5x+5y}$; в) $\frac{a^2+ab}{b^2}:\frac{a+b}{b}$; г) $\frac{1}{a^2-ab}:\frac{b}{a^2-b^2}$.

59 Упростите выражение:

а) $\frac{a^2-c^2}{c^2}\cdot\frac{c^2}{c-a}$; в) $\frac{(x-y)^2}{y^2}\cdot\frac{y^2}{y^2-x^2}$; д) $\frac{a}{ab-b^2}:\frac{a^2}{b^2-a^2}$;

б) $\frac{m}{3m-3n}:\frac{m^2}{n^2-m^2}$; г) $\frac{2}{25-5a}:\frac{10}{(a-5)^2}$; е) $\frac{x^2-2xy+y^2}{2x}\cdot\frac{2x}{5y-5x}$.

Образец. $\frac{x-y}{a}\cdot\frac{b}{y-x}=\frac{x-y}{a}\cdot\left(-\frac{b}{x-y}\right)=-\frac{(x-y)b}{a(x-y)}=-\frac{b}{a}$.

Найдите произведение или частное (№ 60–62):

60 а) $\frac{a}{2x}\cdot 2a$; $8x\cdot\frac{c}{4x}$; $\frac{ab}{cd}\cdot bc$; $axy\cdot\frac{a}{xy}$; б) $3a:\frac{9}{a}$; $\frac{2ab}{3}:(6b)$; $\frac{ab}{cd}:(bc)$; $mpq:\frac{m}{pq}$.

61 а) $2x^2y\cdot\frac{x}{y}$; б) $5ab^2:\frac{a}{b}$; в) $\frac{3a}{4b^2}\cdot 8a^2b^2$; г) $\frac{12m^2}{n^2}:(6m^2n^2)$; д) $\frac{2a^2}{3b^2}:(12ab)$.

62 а) $(2a+6)\cdot\frac{a-2}{a+3}$; б) $\frac{n^2-4}{3}:(n-2)^2$; в) $(x-z):\frac{x^2-2zx+z^2}{x^2-z^2}$; г) $\frac{b}{a^2-ab}\cdot(ab-b^2)$.

63 Выполните умножение или деление:

а) $\frac{x^2-9}{x^2-5x}\cdot\frac{x^2-25}{x^2-3x}$; в) $\frac{(c-d)^2}{cd^2+d^3}:\frac{d^2-c^2}{d^2}$; д) $\frac{x^3+y^3}{x^3-y^3}\cdot\frac{y-x}{y+x}$;

б) $\frac{b^2-ab}{a^2+ad}:\frac{ab}{d^2+ad}$; г) $\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}\cdot\frac{(b-a)^3}{3(a+b)^3}$; е) $\frac{p^3-q^3}{p^4-q^4}\cdot\frac{p^2+q^2}{p-q}$.

64 Разберите рассмотренный в образце приём, который делает удобным применение калькулятора для вычисления значений выражения. Найдите с помощью калькулятора значения выражения:

а) $\frac{x+y}{xy}$ при $x=1{,}25$ и $y=1{,}6$; при $x=0{,}032$ и $y=0{,}04$;

б) $\frac{2x-y}{5y}$ при $x=10{,}24$ и $y=0{,}25$; при $x=5{,}12$ и $y=0{,}5$;

в) $\frac{x^2+xy}{y^2}$ при $x=0{,}9$ и $y=7{,}5$; при $x=10{,}8$ и $y=0{,}45$.

Образец. а) Чтобы выполнять вычисления непрерывной цепочкой, преобразуем выражение $\frac{x+y}{xy}$ следующим образом: $\frac{x+y}{xy}=\frac{x+y}{x}\cdot\frac{1}{y}=\frac{x+y}{x}:y$. Теперь можно последовательно подставлять числовые значения вместо x и y.

ВСЕ ДЕЙСТВИЯ С АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ДРОБЯМИ

Выполните действия (№ 65–67):

65 а) $\frac{ab}{a-b}\cdot\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)$; в) $\left(x-\frac{6x-4}{x+2}\right)\cdot\frac{x+2}{x^2-2x}$; д) $\left(\frac{a-c}{c}+\frac{2a}{a-c}\right):\frac{a^2+c^2}{a-c}$;

б) $\frac{xy^2}{y^2-x^2}\cdot\left(\frac{2}{x}-\frac{2}{y}\right)$; г) $\left(\frac{m}{m-n}-\frac{m}{m+n}\right)\cdot\frac{m^2+mn}{2n}$; е) $\left(\frac{c+d}{c}-\frac{c+d}{d}\right):\frac{c+d}{c^2d^2}$.

66 а) $(x^2-y^2):\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$; б) $(a+b)^2:\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{2}{ab}\right)$; в) $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2\right):(x-y)$.

67 а) $\frac{m}{1-n}+\frac{m^2-mn}{n^2-1}\cdot\frac{n+1}{m}$; в) $x-\frac{x^2-xy}{x+y}\cdot\frac{x}{x-y}$;

б) $\frac{a^2-9}{a}:\frac{(a-3)^2}{a}+\frac{6}{3-a}$; г) $\frac{b+3}{1-b}+\frac{b+3}{b-1}\cdot(b+1)$.

68 Выполните возведение в квадрат:

а) $\left(n+\frac{1}{n}\right)^2$; б) $\left(c-\frac{1}{c}\right)^2$; в) $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2$; г) $\left(\frac{1}{2y}-x\right)^2$.

Подсказка. Примените формулы $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$; подумайте, какое выражение надо принять за a и какое за b.

69 Упростите выражение:

а) $\left(c+\frac{1}{c}\right)^2-2$; б) $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2-\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)$; в) $\left(a+\frac{a+1}{a}\right)^2-\left(a-\frac{a+1}{a}\right)^2$.

70 МАТЕМАТИКА ВОКРУГ НАС Выразите из формулы каждую переменную через остальные переменные: а) $\frac{1}{R}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}$ — формула для вычисления общего сопротивления при параллельном соединении проводников; б) $\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}$ — формула для вычисления общей ёмкости конденсаторов при их последовательном соединении.

Упростите выражение (№ 71–73):

71 а) $\left(\frac{a}{a+1}+\frac{a^2+1}{1-a^2}-\frac{a}{a-1}\right):\frac{a+a^2}{(1-a)^2}$; в) $\frac{4}{x^2-4}+\frac{4x}{4-4x+x^2}\cdot\left(\frac{2}{2x+x^2}-\frac{x}{4+2x}\right)$;

б) $\frac{(a-5)^2}{a^2+5a}:\left(\frac{5}{a+5}-\frac{a^2+25}{a^2-25}-\frac{5}{5-a}\right)$; г) $\left(\frac{1+x}{x^2-xy}-\frac{1-y}{y^2-xy}\right):\frac{x^2+y^2+2xy}{x^2y-xy^2}-\frac{x}{x^2-y^2}$.

72 а) $\left(1+\frac{m}{n}+\frac{m^2}{n^2}\right):\left(\frac{1}{m}-\frac{m^2}{n^3}\right)$; в) $\left(b+3+\frac{9}{b-3}\right):\left(\frac{b}{b-3}+\frac{3b}{(3-b)^2}\right)$;

б) $\left(\frac{x^3}{y^3}+1\right):\left(\frac{x}{y^2}-\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)$; г) $\left(\frac{n}{1+2n+n^2}-\frac{n}{n+1}\right):\left(\frac{1}{n+1}+n-1\right)$.

73 а) $\frac{1}{a+b}+\frac{a^2+b^2-ab}{b^2-a^2}\cdot\frac{ab-b^2}{a^3+b^3}-\frac{1}{(a+b)^2}$; б) $\frac{x^3-y^3}{2x+2y}\cdot\left(\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}\right):\frac{x^2+xy+y^2}{(x+y)^2}$.

74 Докажите, что при всех допустимых значениях переменных:

а) значения выражения $\left(\frac{n^2}{m^3-mn^2}-\frac{n}{m^2-mn}\right)\cdot\left(\frac{m}{n^2+mn}-\frac{1}{m+n}\right)$ отрицательны;

б) значения выражения $\frac{x^3-y^3}{3x+3y}\cdot\left(\frac{3xy}{x-y}-3y\right):\frac{x^2+xy+y^2}{(x+y)^3}$ неотрицательны.

1.5 СТЕПЕНЬ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Что означают записи вида 5^{-4}, 8^0.
- Как с помощью степеней числа 10 можно записывать большие и малые числа.

Вам уже давно известно из курса математики, что такое степень с натуральным показателем. Позже в курсе алгебры и физики вы узнали, что бывают и отрицательные показатели. Например, запись 10^{-5} означает $\frac{1}{10^5}$. Вообще понятие степени довольно объёмное и далеко не ограничивается только подобными случаями. Здесь вы расширите свои знания об этом понятии и узнаете, что такое степень с произвольным целым показателем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТЕПЕНИ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ Вы знаете, что значит степень, показатель которой — произвольное натуральное число:

1) Для любого числа a и натурального числа $n > 1$:
$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ \text{множителей}}.$$

2) Первая степень любого числа равна самому числу: $a^1 = a$.

Например:
$$(-1{,}2)^5 = (-1{,}2)\cdot(-1{,}2)\cdot(-1{,}2)\cdot(-1{,}2)\cdot(-1{,}2);$$
$$\left(1\frac{2}{15}\right)^1 = 1\frac{2}{15}.$$

Множество целых чисел состоит из натуральных чисел, противоположных им чисел и нуля. (Натуральные числа часто называют *целыми положительными числами*, а противоположные им числа — *целыми отрицательными числами*). Поэтому, для того чтобы понятие степени имело смысл при любом целом показателе, дополнительно к приведённому определению надо знать, что означает степень, показатель которой целое отрицательное число, и что означает степень с нулевым показателем.

1) Для любого числа a, не равного нулю, и целого отрицательного числа $-n$
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

2) Для любого числа, не равного нулю, $a^0 = 1$.

Например, по определению
$$10^{-5} = \frac{1}{10^5} = \frac{1}{100\,000} = 0{,}00001;\ \left(-\frac{5}{6}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(-\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{1}{\frac{25}{36}} = \frac{36}{25}.$$

В соответствии с этим же определением $8^0 = 1$, $(-120)^0 = 1$, $\left(\frac{3}{7}\right)^0 = 1$, а такие выражения, как 0^{-5}, 0^0, смысла не имеют.

Современное «двухэтажное» обозначение степени было введено ещё в XVII в. Декартом, создателем современной алгебраической символики. В XX в. с появлением компьютеров оказалось, что в тексте компьютерных программ нет возможности использовать эту запись. В разных языках программирования для операции возведения в степень стали изобретаться особые значки. Среди самых общепринятых — знак ^ (*циркумфлекс*). Вместо a^b пишут a^b. Вы можете увидеть этот знак на клавиатурах многих калькуляторов, где он заменяет клавишу x^y. На клавиатуре компьютера он находится на клавише с цифрой 6 и набирается в режиме английского алфавита командой *Shift* + 6.
Вообще циркумфлекс — известный знак, имеющий другие функции и употребляемый во многих смыслах. Например, те из вас, кто изучает французский язык, знакомы с этим значком (*accent circonflexe*), ставящимся над некоторыми гласными буквами.

Таким образом, мы получили определение, раскрывающее смысл записи a^n, где n — любое целое число. Это определение включает в себя четыре пункта: показатель степени — натуральное число, большее 1; равное 1; целое отрицательное число; нуль.

Обратите внимание: равенство $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ означает, что числа a^n и a^{-n} — взаимно обратные, так как их произведение $a^n \cdot \frac{1}{a^n}$ равно 1. В частности, a^{-1} есть число, обратное числу a.

ЗАПИСЬ БОЛЬШИХ И МАЛЫХ ЧИСЕЛ Степени с целым показателем используются для записи больших и малых чисел в так называемом **стандартном виде**. Суть этой записи в том, что в числе выделяется множитель — степень 10.

Стандартным видом числа называют его запись в виде произведения $a \cdot 10^n$, где $1 \le a < 10$ и n — целое число.

Пример 1. Масса Земли и масса атома кислорода, записанные в стандартном виде, соответственно равны $5{,}98 \cdot 10^{24}$ кг и $2{,}67 \cdot 10^{-26}$ кг. Если эти массы представить в виде десятичной записи, то получатся такие «длинные» числа:

$$5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{кг} = 5\,980\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\ \text{кг};$$

$$2{,}67 \cdot 10^{-26}\ \text{кг} = 0{,}0000000000000000000000000267\ \text{кг}.$$

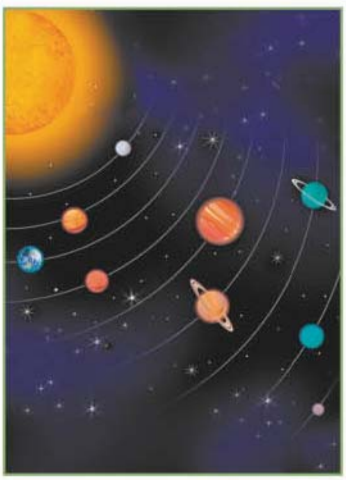
Запись больших и малых чисел в стандартном виде очень удобна: она делает числа «обозримыми», их легче прочитать, не ошибиться при этом в нулях, их проще сравнить, удобнее выполнять вычисления.

Пример 2. Выясним, во сколько раз расстояние от Солнца до Нептуна больше расстояния от Солнца до Земли.

Расстояние от Солнца до Нептуна равно $4{,}497 \cdot 10^9$ км, а от Солнца до Земли — $1{,}495 \cdot 10^8$ км. Найдём их отношение:

$$\frac{4{,}497 \cdot 10^9}{1{,}495 \cdot 10^8} \approx 3{,}0 \cdot 10 = 30.$$

Таким образом, Нептун находится примерно в 30 раз дальше от Солнца, чем Земля.



Теперь вы знаете, что числа a^{-1} и a взаимно обратные. Это послужило источником того, что показатель -1 стал использоваться для обозначения объекта, обратного данному. Например, если p — это число, то обратное ему число можно обозначить p^{-1}; если $\frac{A}{B}$ — алгебраическая дробь, то обратную ей дробь можно обозначить $\left(\frac{A}{B}\right)^{-1}$. В последующих классах вы узнаете ещё случаи аналогичного использования этого показателя.

Степени числа 10

$10 = 10^1$	$0{,}1 = 10^{-1}$
$100 = 10^2$	$0{,}01 = 10^{-2}$
$1000 = 10^3$	$0{,}001 = 10^{-3}$
…	…
$\underbrace{100\ldots0}_{n\ \text{нулей}} = 10^n$	$0{,}\underbrace{0\ldots0}_{n-1\ \text{нулей}}1 = 10^{-n}$

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Воспользуйтесь определением степени с целым отрицательным показателем для нахождения значения выражения: 2^{-4}; $(-0{,}1)^{-3}$; $\left(\frac{3}{7}\right)^{-2}$.
- Как определяют степень с нулевым показателем? Чему равно $(-53)^{-0}$?
- Найдите произведение: $6 \cdot 6^{-1}$; $\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$; $(-0{,}3) \cdot (-0{,}3)^{-1}$.
- Представьте в десятичной записи число: $3{,}1 \cdot 10^{-2}$; $1{,}8 \cdot 10^4$.

УПРАЖНЕНИЯ

ОСВАИВАЕМ ПОНЯТИЕ СТЕПЕНИ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

75 Замените выражение равным, не содержащим отрицательных показателей: a^{-4}; $(3m)^{-3}$; ax^{-1}; $5x^3y^{-2}$; $a^{-2} + b^{-2}$; $(a - b)^{-2}$.

76 Представьте дробь в виде произведения, используя отрицательные показатели:
а) $\frac{1}{a^4}$; $\frac{a}{b^5}$; $\frac{1}{y}$; $\frac{a}{x}$; б) $\frac{1}{ab^3}$; $\frac{2}{x^2y^7}$; $\frac{m}{(m+n)^2}$; $\frac{5}{a-b}$; в) $\frac{3^6}{7^8}$; $\frac{2^{15}}{11^5 \cdot 6^7}$; $\frac{10}{a^n}$; $\frac{a^m}{x^k}$.

77 Вычислите:
а) 5^{-2}; 2^{-5}; $1{,}2^{-2}$;
б) $(-7)^{-2}$; $(-3)^{-3}$; $(-0{,}2)^{-6}$;
в) 1^{-23}; $(-1)^{-15}$; $(-1)^{-20}$;
г) 9^0; $(-1{,}7)^0$; $(-1)^0$.

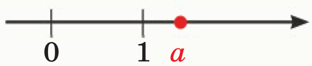
78 Найдите значение выражения:
а) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$; б) $\left(\frac{6}{5}\right)^{-2}$; в) $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}$; г) $\left(1\frac{2}{3}\right)^{-3}$; д) $\left(-1\frac{1}{2}\right)^{-5}$; е) $\left(-\frac{12}{7}\right)^{0}$.

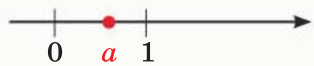
79 Докажите, что: а) $\left(\frac{8}{9}\right)^{-5} = \left(\frac{9}{8}\right)^{5}$; б) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-10} = \left(\frac{3}{2}\right)^{10}$; в) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$.

80 Вычислите, пользуясь свойством, доказанным в упражнении 79:
а) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$; $\left(\frac{8}{7}\right)^{-2}$; $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-4}$; $\left(-\frac{4}{3}\right)^{-3}$; б) $\left(\frac{1}{6}\right)^{-2}$; $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$; $0{,}1^{-5}$; $0{,}5^{-6}$.

81 а) Расположите в порядке возрастания числа: $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$; $\frac{2}{3}$; $\left(\frac{3}{2}\right)^{-4}$; $\left(\frac{3}{2}\right)^{0}$.
б) Расположите в порядке убывания числа: $0{,}8^{-8}$; $0{,}8^0$; $0{,}8$; $0{,}8^{-6}$.

82 На координатной прямой отмечено число a. Сравните числа a^{-2} и a^{-3}.

а) 

б) 

83 При каких значениях m верно равенство: $5^m = 625$; $2^m = \frac{1}{64}$; $\frac{1}{10^m} = 10000$?

84 Представьте члены последовательности в виде степени с основанием 2. Запишите три следующих члена последовательности. Какое число будет стоять в этой последовательности на 100-м месте; на месте с номером n?
а) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$; ...; б) 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; ...; в) 2; 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; ... .

85 Докажите, что: а) $\frac{1}{2^{-3}} = 2^3$; б) $\frac{1}{a^{-4}} = a^4$; в) $\frac{a}{b^{-2}} = ab^2$.

86 Запишите без отрицательных показателей выражение, равное данному: $\frac{2}{2^{-15}}$; $\frac{a^2}{b^{-3}}$; $\frac{x^{-2}}{y^{-4}}$; $\frac{m^{-1}}{2n^{-2}}$; $\frac{xy}{z^{-1}}$. Воспользуйтесь результатом, полученным в упражнении 85.

87 Найдите значение выражения: а) $\frac{2^{-3} \cdot 3}{4^{-1}}$; б) $\frac{5^2 \cdot 10^{-2}}{2^{-3}}$; в) $\frac{8^{-1}}{6^2 \cdot 4^{-3}}$; г) $\frac{8^{-2} \cdot 9^{-1}}{12^{-2}}$.
Подсказка. Сначала запишите выражение так, чтобы оно не содержало отрицательных показателей.

88 Представьте в виде степени числа 10 следующие числа:
100; 10; 1; 0,1; 0,001; 0,0001; 0,00001; 0,000001; 0,0000001.

89 Запишите число в виде суммы разрядных слагаемых:
а) 17,214; б) 0,15268; в) 0,0371; г) 426,503; д) 0,003047.
Образец. $523{,}48 = 5\cdot10^2 + 2\cdot10^1 + 3\cdot10^0 + 4\cdot10^{-1} + 8\cdot10^{-2}$.

90 Какое число представлено в виде суммы разрядных слагаемых? Запишите его:
а) $7\cdot10^1 + 2\cdot10^0 + 2\cdot10^{-1} + 3\cdot10^{-2} + 4\cdot10^{-3}$;
б) $5\cdot10^0 + 9\cdot10^{-1} + 3\cdot10^{-2} + 3\cdot10^{-3} + 1\cdot10^{-4}$;
в) $3\cdot10^5 + 5\cdot10^4 + 0\cdot10^3 + 1\cdot10^2 + 6\cdot10^1 + 9\cdot10^0$;
г) $2\cdot10^2 + 0\cdot10^1 + 7\cdot10^0 + 0\cdot10^{-1} + 4\cdot10^{-2}\ 3\cdot10^{-3}$.

ОСВАИВАЕМ ЗАПИСЬ БОЛЬШИХ И МАЛЫХ ЧИСЕЛ

Запишите в стандартном виде число (№ 91–92):

91 а) 47 000; б) 105 000; в) 302 000; г) 35 000 000 000.

92 а) 0,0051; б) 0,000204; в) 0,0000043; г) 0,000000218.
Образец. $0{,}000045 = 4{,}5 : 10^5 = 4{,}5\cdot10^{-5}$.

МАТЕМАТИКА ВОКРУГ НАС **Представьте величины в десятичной записи (№ 93–94):**

93 а) Длина экватора Земли равна $4\cdot10^4$ км.
б) Территория России составляет $1{,}71\cdot10^7$ км^2.
в) По данным ООН, численность населения Европы в 2012 г. составила примерно $8{,}3\cdot10^8$ человек, а Азии — $4{,}2\cdot10^9$ человек.

94 а) Современные электронные микроскопы дают возможность различать объекты размером до $0{,}002\cdot10^{-9}$ м (0,002 нанометра).
б) Расстояние между атомами водорода равно $0{,}074\cdot10^{-9}$ м, а кислорода — $0{,}121\cdot10^{-9}$ м.

95 а) За первые два месяца наступившего года в мире было продано $1{,}02\cdot10^7$ компьютеров. Выразите это число в миллионах штук.
б) Территория Антарктиды составляет $1{,}398\cdot10^7$ км^2. Сколько это тысяч квадратных километров?
Образец. $6{,}83\cdot10^8$ человек $= 683\cdot10^6$ человек $=$ 683 млн человек.

96 Расстояние от Земли до Солнца равно $1{,}495\cdot10^8$ км, а до ближайшей после Солнца звезды альфа Центавра $4{,}1\cdot10^{13}$ км. За какое время доходит до Земли свет от Солнца и от звезды альфа Центавра?
Подсказка. Скорость света примерно 300 000 км/с.

97 В 2011 г. численность населения Земли составила 7 млрд человек. Примерная численность населения через n лет после 2011 г. или за n лет до этого времени (при небольших значениях n) может быть рассчитана по формуле $P = 7\cdot10^9\cdot1{,}012^n$. Определите примерную численность населения Земли: а) в 2017 г.; б) в 2005 г.
Подсказка. Подумайте, какой знак должен иметь показатель степени n в случае б).

1.6 СВОЙСТВА СТЕПЕНИ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Как выполнять действия со степенями с целым показателем.
- Почему целесообразны принятые определения степени с целым отрицательным показателем и с нулевым показателем.

Изучая эту главу, вы увидели, что правила выполнения действий с обыкновенными дробями распространяются и на алгебраические дроби. Здесь вы снова встретитесь с подобной ситуацией: свойства и соответствующие правила действий со степенями с натуральным показателем распространяются и на степень с целым показателем.

КАКИМИ СВОЙСТВАМИ ОБЛАДАЕТ СТЕПЕНЬ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ Ниже в буквенном виде записаны свойства степени с целым показателем. Они те же, что и свойства степени с натуральным показателем.

Для любого $a \neq 0$ и любых целых m и n:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$
$$a^m : a^n = a^{m-n};$$
$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Для любых $a \neq 0$ и $b \neq 0$ и любого целого n:

$$(ab)^n = a^n b^n;$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Операции сложения и умножения чисел обладают переместительным свойством:

$$a + b = b + a;\ ab = ba$$

для любых a и b.

Но операция возведения в степень этим свойством не обладает: в общем случае $a^b \neq b^a$. Например,

$$5^2 = 25, \text{ а } 2^5 = 32.$$

Точно так же, в отличие от сложения и умножения, возведение в степень не обладает сочетательным свойством: $(a^b)^c \neq a^{(b^c)}$. Например,

$$(4^3)^2 = 64^2 = 4096, \text{ а}$$
$$4^{(3^2)} = 4^9 = 262144.$$

Договорились в выражениях вида $4^{(3^2)}$ скобки не писать. Поэтому, если вы видите запись 4^{3^2}, знайте, что это $4^{(3^2)}$ и возведение в степень надо выполнять «справа налево».

Покажем на примере одного из свойств, как можно, используя принятое определение степени с целым показателем, убедиться в справедливости этих свойств. Рассмотрим *основное свойство степени*, которое выражается равенством:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Для случая, когда оба показателя положительны, т. е. являются натуральными числами, мы это свойство уже доказывали. Вот эти рассуждения, записанные в буквенном виде:

$$a^m \cdot a^n = \overbrace{\underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m \text{ множителей}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ множителей}}}^{m+n \text{ множителей}} = a^{m+n}.$$

Чтобы показать, что это свойство справедливо при любых целых значениях m и n, нужно рассмотреть другие возможные варианты, их три: оба показателя отрицательны; один отрицателен, другой положителен; один из показателей равен нулю. Не проводя доказательства в общем виде, ограничимся проверкой этого свойства на конкретных примерах.

1) Пусть $m = -4$, $n = -6$, тогда

$$a^{-4} \cdot a^{-6} = \frac{1}{a^4} \cdot \frac{1}{a^6} = \frac{1}{a^{4+6}} = a^{-(4+6)} = a^{-4+(-6)}.$$

2) Пусть $m = -4$, $n = 6$, тогда

$$a^{-4} \cdot a^6 = \frac{1}{a^4} \cdot a^6 = \frac{a^6}{a^4} = a^{6-4} = a^{-4+6}.$$

3) Пусть $m = -4$, $n = 0$, тогда:

$$a^{-4} \cdot a^0 = a^{-4} \cdot 1 = a^{-4} = a^{-4+0}.$$

ПРИМЕРЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВЫРАЖЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ СТЕПЕНИ Так как свойства степени с целым показателем те же, что и свойства степени с натуральным показателем, то и действия над степенями с целыми показателями выполняются по тем же правилам.

1) При умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели степеней складывают.
2) При делении степеней с одинаковыми основаниями из показателя делимого вычитают показатель делителя.
3) При возведении степени в степень показатели степеней перемножают.
4) При возведении в степень произведения возводят в эту степень каждый множитель; при возведении в степень дроби возводят в эту степень числитель и знаменатель дроби.

Пример 1. Упростим выражение $a^{-5} \cdot a^8 \cdot a^{-4}$.

$$a^{-5} \cdot a^8 \cdot a^{-4} = a^{-5+8-4} = a^{-1}.$$

Пример 2. Представим выражение $\frac{x^{-9}}{x^{-12}}$ в виде степени с основанием x.

$$\frac{x^{-9}}{x^{-12}} = x^{-9-(-12)} = x^{-9+12} = x^3.$$

Пример 3. Упростим выражение $c^{-4} \cdot (c^{-4})^{-1}$.

$$c^{-4} \cdot (c^{-4})^{-1} = c^{-4} \cdot c^4 = c^0 = 1.$$

Здесь мы сначала в соответствии с правилами порядка действий возвели степень в степень, затем перемножили степени с одинаковым основанием c.

Определения, которые приняты для степени с отрицательным целым показателем и с нулевым показателем, позволили сохранить свойства степени, справедливые для натурального показателя. Действительно, для степеней с натуральным показателем равенство $a^m : a^n = a^{m-n}$ было получено при условии, когда $m > n$. Распространяя это свойство на случай, когда $m = n$, получаем: $a^m : a^m = a^{m-m} = a^0$. Но с другой стороны, $a^m : a^m = 1$. Отсюда ясна целесообразность определения степени с нулевым показателем: $a^0 = 1$. Распространив исходное свойство на случай $m = 0$, можно показать целесообразность определения $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Сделайте это самостоятельно.

Помните, как в десятичной системе записывается число гугол? Это единица с последующими за ней ста нулями, т. е. 10^{100}. Но существуют числа, бо́льшие гугола и тоже имеющие названия, например гуголплекс (*googolplex*). Это единица с гуголом нулей за ней, т. е. 10 в степени гугол: $10^{10^{100}}$. Такие «степенные башни» в компьютерных текстах, а часто и на бумаге записывают с помощью циркумфлекса — ^. Получается «одноэтажная» запись: 10^(10^100). Скобки показывают нужный порядок действий «справа налево». Запись без скобок 10^10^100 означает выполнение действий слева направо, что в наших обозначениях выглядит как $(10^{10})^{100}$. Если «башня» более высокая, то такая запись получается менее громоздкой. Сравните:

$$2^{3^{4^{5^6}}} \text{ и } 2\text{^}(3\text{^}(4\text{^}(5\text{^}6))).$$

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Сформулируйте словами свойства степени с целым показателем, записанные на с. 28 в буквенном виде.
- Приведите конкретные примеры справедливости свойства $a^m : a^n = a^{m-n}$, где $a \neq 0$, m и n — целые числа (в качестве образца возьмите рассуждение из текста для свойства $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$).
- Из следующих выражений выберите те, к которым можно применить свойства степени, и примените их: $a^{-3} \cdot a^5$, $m^7 \cdot n^{-1}$, $\frac{x^{10}}{y^5}$, $\frac{b^5}{b^{10}}$.

УПРАЖНЕНИЯ

ВЫПОЛНЯЕМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВЫРАЖЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ СТЕПЕНИ

98 Представьте выражение в виде степени:

а) $a^{-10} \cdot a^{-5}$; $b^{14} \cdot b^{-6} \cdot b^{-9}$; б) $\frac{x^8}{x^{12}}$; $c^{-4} : c^{-3}$; в) $(a^{-4})^2$; $(m^{-2})^{-3}$; г) $a^{-7} \cdot b^{-7}$; $\frac{x^{-4}}{y^{-4}}$.

99 Найдите значение выражения:

а) $\frac{5^{-8}}{5^{-10}}$; $3^{-10} \cdot 3^7$; $(10^{-4})^{-1}$; $(9^{-5})^0$; б) $\left(\frac{3}{7}\right)^3 \cdot 7^3$; $\frac{6^{-2}}{24^{-2}}$; $3^{-4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$; $\frac{10^{-6}}{5^{-6}}$.

Упростите выражение (№ 100—102):

100 а) $3x^{-3} \cdot 5x^{-5}$; б) $2m^{-6} \cdot 0{,}5m^{10}$; в) $\frac{4y^{-2}}{6y^{-3}}$; г) $\frac{12a^5}{15a^{-5}}$; д) $(2b^{-4})^3$; е) $\left(\frac{1}{10}c^3\right)^{-2}$.

101 а) $x^{-2}y \cdot xy^{-2}$; б) $ab^{-3} \cdot a^{-1}b^5$; в) $\frac{b^{-2}c^5}{b^{-4}c^{-1}}$; г) $\frac{mn^{-2}}{m^3n^3}$; д) $(c^{-3}x^2)^{-5}$; е) $(a^{-4}b^{-2})^{-1}$.

102 а) $a^8(a^{-4})^3$; в) $(c^{-3}c^8)^{-2}$; д) $(m^{-4})^2 \cdot (m^{-3})^{-2}$; ж) $(2x^{-3} \cdot 5x^2)^{-2}$;

б) $\frac{x^{-10}x^5}{x^6}$; г) $\left(\frac{b^4}{b^{-1}b^{-2}}\right)^4$; е) $\frac{(y^7y^{-2})^{-3}}{y^{-8}}$; з) $\left(\frac{3}{a^{-3}} \cdot \frac{a^3}{6}\right)^{-1}$.

103 Найдите значение выражения:

а) $\frac{5^{-10}}{5^{-3} \cdot 5^{-5}}$; в) $6^{-1} \cdot 6^3 \cdot 6^{-4}$; д) $10^{-12} \cdot (10^{-5})^{-2}$; ж) $\frac{(7^{-2})^3}{7^{-4}}$;

б) $\frac{12^{-3} \cdot 12^{-7}}{12^{-9}}$; г) $2^{12} \cdot 2^{-5} \cdot 2^{-1}$; е) $(3^{-20} \cdot 3^{21})^{-3}$; з) $\frac{2^{-15}}{(2^5)^{-4}}$.

104 Вычислите:

а) $125 \cdot 5^{-4}$; в) $16^{-2} : 2^{-5}$; д) $(27^2 \cdot 3^{-8})^{-1}$; ж) $\frac{10^{-9}}{(100^2)^{-3}}$;

б) $100^3 \cdot 10^{-8}$; г) $\frac{81^2}{3^{11}}$; е) $(36^2 \cdot 6^{-6})^{-1}$; з) $\frac{(125^2)^{-2}}{5^{-10}}$.

105 Представьте выражение в виде степени с основанием a и найдите его значение при заданном значении a:

а) $\frac{a^3a^7}{a^6}$, $a = 10$; б) $\frac{a^{18}}{a^{-11}a^{31}}$, $a = \frac{1}{5}$; в) $a^{-14}(a^{-3})^{-5}$, $a = \frac{2}{3}$; г) $\frac{1}{a^{-10}} \cdot \frac{1}{a^{12}}$, $a = -4$.

106 Представьте в виде степени с основанием 2:

а) $4^m \cdot 4^n$; $8^m : 8^n$; $\left(\left(\frac{1}{4}\right)^m\right)^n$; б) $4^{-n} \cdot 4^{2n}$; $\frac{16^{8n}}{16^{2n}}$; $((0{,}25)^{-3})^n$.

107 Из выражений, записанных в правом столбце таблицы, выберите то, которое равно выражению в левом столбце. Запишите соответствующее равенство.

а)	$25 \cdot 5^n$	5^{n+2}; 5^{2n}; 125^n; 25^n
б)	$\frac{2^n}{8}$	$2^n - 2^3$; $2^{\frac{n}{3}}$; $\left(\frac{1}{4}\right)^n$; 2^{n-3}
в)	$27 \cdot 3^n$	3^{n+3}; 3^{3n}; 81^n; 27^{n+1}
г)	$\frac{2^n}{4}$	$2^{\frac{n}{2}}$; $2^n - 2^2$; $\left(\frac{1}{2}\right)^n$; 2^{n-2}

108 Найдите значение выражения:

а) $3^{10} \cdot 81^3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{10}$; б) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-25} \cdot 25^{-6} \cdot 125^{-4}$; в) $\frac{6^{-10}}{81^{-3} \cdot 32^{-2}}$; г) $\frac{20^{-4} \cdot 15^{-3}}{30^{-7}}$.

109 Известно, что $2^n = a$. Выразите через a: 2^{n+1}; 2^{n+2}; 2^{2n+1}; 2^{n-1}.

Сократите дробь (№ 110–111):

110 а) $\dfrac{5^{n+1}\cdot 3^{n-1}}{15^n}$; в) $\dfrac{12^n}{2^{2n+1}\cdot 3^{n-1}}$;

б) $\dfrac{14^n}{2^{n-2}\cdot 7^{n+2}}$; г) $\dfrac{2^{2n-1}\cdot 5^{2n+1}}{100^n}$.

111 а) $\dfrac{a^{-1} + a^{-2} + a^{-3}}{a^3 + a^2 + a}$; в) $\dfrac{2^n + 2^{n+2}}{10\cdot 2^n}$;

б) $\dfrac{1 + c^3 + c^5}{c^{-6} + c^{-3} + c^{-1}}$; г) $\dfrac{10^{n+2} + 10^{2n}}{10^n}$.

112 Преобразуйте в дробь выражение:

а) $(x^{-2} - y^{-2}):(x^{-1} + y^{-1})$;

б) $(m + n)^{-1}\cdot(m^{-1} + n^{-1})$;

в) $(a + b)^{-2}\cdot(a^{-2} - b^{-2})$;

г) $(xy^{-1} - x^{-1}y):(x - y)$.

Степени 10	Значение степени 10
10^5	100 000
10^4	10 000
10^3	1000
10^2	100
10^1	10
10^0	1
10^{-1}	0,1
10^{-2}	0,01
10^{-3}	0,001
10^{-4}	0,0001
10^{-5}	0,00001

ВЫЧИСЛЯЕМ С БОЛЬШИМИ И МАЛЫМИ ЧИСЛАМИ

Выполните вычисления и результат представьте в десятичной записи (№ 113–114):

113 а) $(1{,}8\cdot 10^3)\cdot(2\cdot 10^4)$; в) $(3\cdot 10^6)\cdot(6{,}4\cdot 10^{-10})$;

б) $(2{,}1\cdot 10^{-5})\cdot(6\cdot 10^7)$; г) $(5\cdot 10^{-3})\cdot(3{,}2\cdot 10^{-1})$.

114 а) $\dfrac{6{,}6\cdot 10^5}{1{,}1\cdot 10^7}$; б) $\dfrac{5{,}6\cdot 10^{-2}}{7\cdot 10^3}$; в) $\dfrac{6\cdot 10^{-8}}{1{,}2\cdot 10^{-4}}$; г) $\dfrac{1{,}9\cdot 10^{-5}}{3{,}8\cdot 10^{-3}}$.

115 МАТЕМАТИКА ВОКРУГ НАС а) Нанометр — это миллиардная часть метра, т. е. 1 *нм* = 10^{-9} *м*. Выразите 1 нанометр: в километрах (км); в сантиметрах (см); в миллиметрах (мм); в микронах (мкм).

Образец. Найдём, какую часть микрона (другое название — микрометр) составляет 1 нанометр. Микрон — это тысячная доля миллиметра, миллиметр — тысячная доля метра, значит микрон — миллионная доля метра: 1 *мкм* = 10^{-6} *м*. Получаем $\dfrac{1\ нм}{1\ мкм} = \dfrac{10^{-9}\ м}{10^{-6}\ м} = 10^{-3}$, т. е. 1 *нм* = 10^{-3} *мкм*.

б) Данные на компакт-диски записываются в виде углублений, имеющих размеры 100 нм глубины и 500 нм ширины. Выразите эти размеры в метрах.

в) В современных технологиях производства микросхем используют элементы размером от 25 до 45 нм, в будущем эти размеры планируют уменьшить до 15 нм. Выразите эти данные в метрах.

116 Расположите числа в порядке возрастания:

а) $8{,}7\cdot 10^{-7}$; $65\cdot 10^{-5}$; $0{,}12\cdot 10^{-6}$; $940\cdot 10^{-12}$;

б) $4{,}5\cdot 10^{-15}$; $0{,}015\cdot 10^{-18}$; $434\cdot 10^{-13}$; $61\cdot 10^{-13}$.

1.7 РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ И ЗАДАЧ

ВЫ ВСПОМНИТЕ:

- Как решают уравнения, содержащие дроби.

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Как решить задачу алгебраическим способом, если по её условию составлено уравнение, содержащее дроби.

$$\frac{4x}{3} - \frac{3x-1}{4} = 2,$$
$$12\cdot\left(\frac{4x}{3} - \frac{3x-1}{4}\right) = 2\cdot 12,$$
$$16x - 3(3x-1) = 24,$$
$$16x - 9x + 3 = 24,$$
$$7x = 21,$$
$$x = 3.$$

При решении задачи алгебраическим способом может получиться уравнение, содержащее дроби. Чтобы решить такое уравнение, надо уметь воспользоваться общим приёмом — избавиться от дробей. В этом пункте вы сможете использовать такой приём для решения уравнений, составленных по условию задач «на движение», «на проценты» и других, возникающих в жизненных ситуациях.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

Пример 1. Решим уравнение $\frac{3x}{2} + \frac{8-4x}{7} = 3$.

Чтобы избавиться от дробей, входящих в уравнение, умножим обе части уравнения на наименьший общий знаменатель дробей, т. е. на число 14:

$$14\cdot\left(\frac{3x}{2} + \frac{8-4x}{7}\right) = 3\cdot 14.$$

Раскрыв скобки, получим уравнение $21x + 16 - 8x = 42$, решив которое найдём его корень: $x = 2$.

Ответ: 2.

Пример 2. Решим уравнение $0{,}09y + 0{,}12(10 - y) = 9$.

Это уравнение внешне не похоже на предыдущее, однако оно содержит десятичные дроби, и вычисления будут легче, если воспользоваться тем же приёмом.

Умножим обе части уравнения на 100:

$$9y + 12(10 - y) = 900,$$

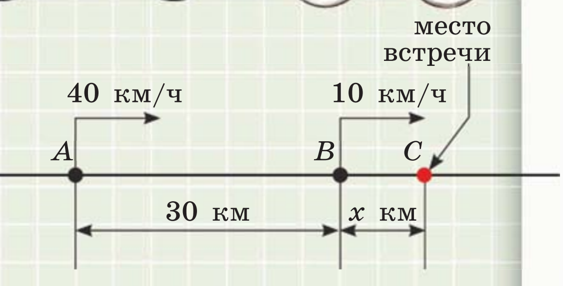
уравнение станет проще, если обе его части разделить на 3:

$$3y + 4(10 - y) = 300,$$
$$3y + 40 - 4y = 300,$$
$$y = -260.$$

Ответ: -260.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Задача 1. Расстояние между пунктами A и B равно 30 км. Из A в направлении B выехал мотоциклист со скоростью 40 км/ч. Одновременно с ним из B в том же направлении выехал велосипедист со скоростью 10 км/ч. На каком расстоянии от пункта B мотоциклист догонит велосипедиста?



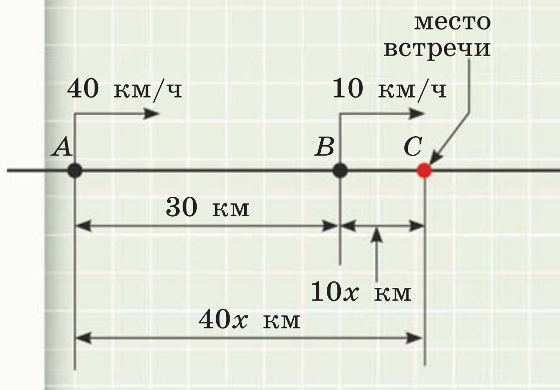
Задачу можно решить разными способами в зависимости от того, что обозначено буквой x.

Способ 1. Пусть x км — расстояние от пункта B до места, в котором мотоциклист догонит велосипедиста. Тогда $\frac{30+x}{40}$ ч — время движения мотоциклиста, $\frac{x}{10}$ ч — время движения велосипедиста. Составим уравнение: $\frac{30+x}{40} = \frac{x}{10}$. Решив его, получим $x = 10$.

Ответ: мотоциклист догонит велосипедиста на расстоянии 10 км от пункта B.

Способ 2. Пусть мотоциклист и велосипедист были в пути x ч. Мотоциклист проехал $40x$ км, а велосипедист $10x$ км. Имеем уравнение $40x - 10x = 30$, откуда $x = 1$. Следовательно, велосипедист был в пути 1 ч и его догнал мотоциклист в 10 км от пункта B.

Ответ: мотоциклист догонит велосипедиста на расстоянии 10 км от пункта B.



При решении задач на вычисление прибыли с банковских вкладов, дохода от инвестиций, на состав вещества и многих других задач приходится иметь дело с процентами. Все такие задачи нетрудно решить, если вы умеете выражать проценты обыкновенной или десятичной дробью и решать главную задачу на проценты — находить процент от заданной величины.

Задача 2. Сколько граммов воды необходимо добавить к 50 г раствора, содержащего 8 % соли, чтобы получить 5 %-ный раствор?

Решение. Пусть x г — количество воды, которое надо добавить. Так как исходное количество раствора — 50 г, то новое количество раствора — $(50 + x)$ г.

Количество соли в исходном растворе составляет 8 % от 50 г, т. е. $0{,}08 \cdot 50$ г.

Количество соли в новом растворе составляет 5 % от $(50 + x)$ г, т. е. $0{,}05 \cdot (50 + x)$ г.

Так как количество соли от добавления воды не изменилось, то оно одинаково в исходном и новом растворах. Поэтому можно записать равенство

$$0{,}08 \cdot 50 = 0{,}05 \cdot (50 + x).$$

Решим составленное уравнение по образцу примера 2. Умножим обе части уравнения на 100. Получим:

$$8 \cdot 50 = 5 \cdot (50 + x),$$
$$8 \cdot 10 = 50 + x,$$
$$x = 30.$$

Ответ: надо добавить 30 г воды.

Задача 3. Школьники за сбор фруктов в саду получили некоторую сумму денег и решили их использовать так: 40 % всей суммы отложить на экскурсии, 25 % оставшейся суммы выделить на подписку новых журналов, а на оставшиеся 27 000 р. оборудовать игровую площадку для подшефного детского сада. Определите, какую сумму денег получили школьники.

Решение. Пусть x р. — сумма денег, полученных школьниками. Когда 40 % суммы они отложили на экскурсии, у них осталось 60 % денег, т. е. $0{,}6x$ р. Когда из этой суммы они выделили 25 % денег, у них осталось 75 % от $0{,}6x$ р., т. е. $0{,}75 \cdot 0{,}6x$ р. — это 27 000 р. Поэтому можно записать уравнение

$$0{,}75 \cdot 0{,}6x = 27\,000.$$

Решите уравнение самостоятельно и дайте ответ на вопрос задачи.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Решите уравнение, комментируя каждый шаг: $\frac{x-1}{3} - \frac{x+1}{2} = 1$.
- Разберите решение задачи 2 и ответьте на вопросы:

1) Какая величина обозначена буквой x?

2) Как выражается количество соли в исходном растворе?

3) Как выражается количество соли в новом растворе?

4) На каком основании составлено уравнение?

УПРАЖНЕНИЯ

РЕШАЕМ УРАВНЕНИЯ

Решите уравнение; воспользуйтесь примером 1 или 2 из текста (№ 117–120):

117 а) $\frac{x-2}{15}=\frac{1}{3}$; б) $\frac{3x-2}{2}=5$; в) $\frac{x-8}{5}=\frac{x+4}{2}$; г) $\frac{3x-1}{6}=\frac{x+2}{3}$.

118 а) $\frac{x+5}{2}-\frac{x}{3}=8$; б) $\frac{x}{5}-\frac{x-1}{3}=3$; в) $\frac{1-x}{7}=1-\frac{2-x}{3}$; г) $\frac{2x-1}{3}-3=\frac{x}{4}$.

119 а) $\frac{x}{3}-2=x$; б) $x-\frac{3-4x}{2}=3$; в) $4-x=\frac{x+5}{8}$; г) $\frac{1-4x}{9}-5=2x$.

120 а) $0{,}26x-0{,}05(x-3)=0{,}06x$;
б) $0{,}12+0{,}76x=0{,}66(x+1)$;
в) $0{,}06(x-3)+0{,}005(x-4)=-0{,}005$;
г) $0{,}005(x+2)=0{,}007x+0{,}001(x-5)$.

Решите уравнение (№ 121–122):

121 а) $\frac{3x-5}{2}-\frac{2x-3}{3}=4-x$; б) $2x+\frac{2x-1}{2}-1=\frac{5x-2}{3}$; в) $\frac{x-6}{4}-\frac{2x-1}{6}=2+2x$.

122 а) $x+\frac{x-10}{2}+\frac{x-9}{5}=\frac{2x-3}{5}-1$; б) $\frac{1-2x}{3}-\frac{5-3x}{6}+\frac{1-3x}{2}=x+4$.

РЕШАЕМ ЗАДАЧИ

Составьте уравнение по условию задачи и решите её. Затем составьте какое-нибудь другое уравнение по этому же условию (№ 123–125):

123 Наташа от дома до стадиона ходит пешком со скоростью 4 км/ч. Однажды она отправилась из дома в обычное время, но поехала на велосипеде со скоростью 12 км/ч. На стадион она приехала на 15 мин раньше обычного. Чему равно расстояние от дома до стадиона?
Подсказка. Не забудьте выразить время в часах.

124 Максим вышел из дома и направился к бассейну со скоростью 50 м/мин. Через 4 мин из дома вслед за ним вышел его брат Артём и пошёл к бассейну со скоростью 60 м/мин. Найдите расстояние от дома до бассейна, если они пришли туда одновременно.

125 Из пункта A в пункт B выехал автобус со скоростью 40 км/ч. Через 4 ч из B в A выехал автомобиль со скоростью 60 км/ч. Расстояние от A до B равно 250 км. На каком расстоянии от пункта A автомобиль и автобус встретились?

126 Туристы отправляются на лодке вверх по реке на рыбалку и должны вернуться на базу через 4 ч. Скорость лодки в стоячей воде 8 км/ч, скорость течения реки 2 км/ч. Туристы планируют провести на рыбалке 3 ч. На какое максимальное расстояние они могут отплыть от базы?

127 Два велосипедиста одновременно выехали с базы на велотрек, куда им надо прибыть к определённому времени. Первый ехал со скоростью 15 км/ч и успел приехать за 5 мин до назначенного времени. Второй ехал со скоростью 12 км/ч и опоздал на 4 мин. На каком расстоянии от велотрека находится база?

128 МАТЕМАТИКА ВОКРУГ НАС Олег решил развивать выносливость и спланировал свою тренировку так: сначала он будет бежать 40 мин по просёлочной дороге, а затем побежит по лесной тропе. И хотя путь по лесной тропе на 2 км короче, он затратит на него на 5 мин больше, так как придётся уменьшить скорость на 4 км/ч. Какое расстояние планирует преодолеть Олег?

РЕШАЕМ ЗАДАЧИ НА ПРОЦЕНТЫ

129 Разберите, как составлено уравнение по условию задачи, и доведите решение задачи до конца:
«Клиент открыл счёт в банке, внеся некоторую сумму денег. Годовой доход по этому вкладу составляет 11 %. Если бы он добавил 800 р., то через год получил бы доход 220 р. Какая сумма была внесена им в банк?»

Составление уравнения:
1) x р. — сумма, которую клиент внёс в банк;
2) $(x + 800)$ р. — такая сумма была бы, если бы он добавил 800 р.;
3) $0{,}11(x + 800)$ р. — доход, который мог бы получить клиент с этой суммы.

Этот доход составляет 220 р.; получаем равенство: $0{,}11(x + 800) = 220$.

130 Получив премию, сотрудник фирмы решил положить её на счёт в банке. Он может открыть счёт с годовым доходом 8 %. Если бы банк выплачивал 11 % годовых, то для получения такого же дохода потребовалось бы положить на счёт на 900 р. меньше. Определите, сколько рублей составляла премия.

131 а) Сколько граммов воды надо выпарить из 80 г 6 %-ного раствора соли, чтобы получить раствор, содержащий 10 % соли?
б) Сколько граммов 25 %-ного сахарного сиропа надо добавить к 200 г воды, чтобы получить 5 %-ный раствор сахарного сиропа?

132 Разберите, как составлено уравнение по условию задачи, и доведите решение задачи до конца:
«Сколько граммов 75 %-ного раствора кислоты надо добавить к 30 г 15 %-ного раствора этой же кислоты, чтобы получить 50 %-ный раствор?»

Составление уравнения:
1) x г — количество 75 %-ного раствора кислоты, которое надо добавить;
2) $(30 + x)$ г — масса получившегося 50 %-ного раствора кислоты;
3) $0{,}75x$ г — количество кислоты в x г 75 %-ного раствора кислоты;
4) $0{,}15 \cdot 30$ г — количество кислоты в 30 г 15 %-ного раствора кислоты;
5) $0{,}5(30 + x)$ г — количество кислоты в 50 %-ном растворе.

Количество кислоты в 75 %-ном растворе	+	Количество кислоты в 15 %-ном растворе	=	Количество кислоты в 50 %-ном растворе
$0{,}75x$	+	$0{,}15 \cdot 30$	=	$0{,}5(30 + x)$

133 Сколько граммов 30%-ного раствора соли надо добавить к 80 г 12 %-ного раствора этой же соли, чтобы получить 20 %-ный раствор соли?

Совет. При составлении уравнения рассуждайте так же, как в задаче № 132.

УЗНАЙТЕ БОЛЬШЕ

ВЫДЕЛЕНИЕ ЦЕЛОЙ ЧАСТИ ИЗ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ДРОБИ

1. Если взять какую-либо неправильную дробь, например $\frac{24}{7}$, то её можно представить в виде смешанной дроби, выделив целую часть: $3\frac{3}{7}$. Точно так же можно поступать и с алгебраическими дробями. Возьмём, например, дробь $\frac{2n^2 + n - 9}{n + 3}$. Эта дробь «неправильная» в том смысле, что в числителе многочлен более высокой степени, чем в знаменателе. Такую дробь можно представить в виде суммы многочлена и дроби, разделив уголком числитель этой дроби на знаменатель, так же как мы делаем это с обыкновенными дробями.

$$\begin{array}{r|l}
2n^2 + n - 9 & n + 3 \\ \cline{2-2}
-\underline{2n^2 + 6n\phantom{{}-9}} & 2n - 5 \\
-5n - 9 & \\
-\underline{-5n - 15} & \\
6 &
\end{array}$$

Сначала старший член делимого $2n^2$ разделим устно на старший член делителя n, получим частное $2n$ и запишем его «под уголок». Это есть первый член частного. Умножим его на $n + 3$, подписывая получаемые члены под нашим многочленом (как это сделано слева), и вычтем результат из исходного многочлена. Затем проделаем то же самое с полученным в остатке многочленом $-5n - 9$.

Получаем $\frac{2n^2 + n - 9}{n + 3} = (2n - 5) + \frac{6}{n + 3}$. В таких случаях говорят, что мы выделили целую часть из дроби.

2. Выделение целой части из дроби позволяет решать многие задачи. Приведём один пример. Определим, при каких целых n значение дроби $\frac{2n^2 + n - 9}{n + 3}$ является целым числом. В предыдущей задаче мы уже выделили целую часть из этой дроби: $\frac{2n^2 + n - 9}{n + 3} = (2n - 5) + \frac{6}{n + 3}$.

Будем рассуждать так: значение многочлена $2n - 5$ при любом целом n является целым числом. Значение дроби $\frac{6}{n + 3}$ будет целым числом, если значение выражения $n + 3$ является делителем числа 6. Теперь просто переберём все делители числа 6 и вычислим соответствующие значения n. Решение удобно оформить в виде таблицы:

$n + 3$	1	−1	2	−2	3	−3	6	−6
n	−2	−4	−1	−5	0	−6	3	−9

Ответ: значение дроби является целым числом при $n = 3, 0, -1, -2, -4, -5, -6, -9$.

1 Выделите из дроби целую часть, выполнив деление уголком:

а) $\frac{3n^2 - 10n - 3}{n - 4}$; б) $\frac{n^3 + n^2 - n + 5}{n + 2}$; в) $\frac{2x^4 - 3x^3 - 2x^2 + x + 4}{2x^2 - x + 1}$; г) $\frac{3x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 2}{x^2 - x - 2}$.

2 При каких целых значениях n значение дроби является целым числом:

а) $\frac{10}{n + 5}$; б) $\frac{15}{2n + 1}$; в) $\frac{8}{2n + 1}$; г) $\frac{2n^2 + 7n + 3}{2n - 1}$; д) $\frac{2n^3 + n^2 - 3n - 4}{n - 2}$?

ПОДВЕДЁМ ИТОГИ

Алгебраическая дробь: $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены.

Множество допустимых значений

В алгебраическую дробь вместо букв можно подставлять любые числа, кроме тех, которые обращают её знаменатель в нуль.

Множество допустимых значений x для дроби $\frac{2x-3}{x+8}$ — все числа, кроме $x=-8$.
Если $x=-6$, то
$\frac{2x-3}{x+8}=\frac{-12-3}{-6+8}=\frac{-15}{2}=-7{,}5$.

1 Найдите значение дроби при указанных значениях переменных:
а) $\frac{ab}{a-b}$ при $a=0{,}5$, $b=2$; б) $\frac{x^2-y^2}{x}$ при $x=-10$, $y=-1$.

2 Укажите допустимые значения переменной для дроби:
а) $\frac{a}{2a-5}$; б) $\frac{x-3}{x^2}$; в) $\frac{b^2-1}{12}$; г) $\frac{25-4c}{c^2-1}$.

3 Выразите из физической формулы $\alpha=(n-1)\theta$: а) переменную θ; б) переменную n.

Основное свойство дроби

Если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на один и тот же ненулевой многочлен, то получится дробь, равная данной.
Следствие из основного свойства:
$\frac{A}{B}=\frac{-A}{-B}=-\frac{-A}{B}=-\frac{A}{-B}$.

1) Приведём дробь $\frac{ab}{a+b}$ к знаменателю $ab+b^2$:
$$ab+b^2=b(a+b),$$
$$\frac{ab}{a+b}=\frac{ab\cdot b}{(a+b)b}=\frac{ab^2}{ab+b^2}.$$
2) Сократим дробь $\frac{m-mn}{m^2-mn}$:
$$\frac{m-mn}{m^2-mn}=\frac{m(1-n)}{m(m-n)}=\frac{1-n}{m-n}.$$

4 Сократите дробь: а) $\frac{16x^3y}{20x^2y^2}$; б) $\frac{a^2-ab}{a^2}$; в) $\frac{m^2-n^2}{mn+n^2}$; г) $\frac{c^2+c}{c^2-c}$; д) $\frac{x-1}{a-ax}$.

5 Какие из следующих выражений равны дроби $\frac{a-x}{a-y}$:
$\frac{x-a}{y-a}$; $-\frac{x-a}{y-a}$; $-\frac{a-x}{y-a}$; $\frac{a-x}{y-a}$?

Сложение (вычитание) дробей

1) Одинаковые знаменатели:
$$\frac{A}{C}\pm\frac{B}{C}=\frac{A\pm B}{C}.$$
2) Чтобы сложить (вычесть) дроби с разными знаменателями, нужно привести их к общему знаменателю и воспользоваться первым правилом.

Умножение дробей: $\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{A\cdot C}{B\cdot D}$.

Деление дробей:
$$\frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C}=\frac{A\cdot D}{B\cdot C}.$$

1) $\frac{a+c}{c^2}-\frac{a-c}{c^2}=\frac{a+c-a+c}{c^2}=$
$=\frac{2c}{c^2}=\frac{2}{c}$;

2) $\frac{m+x}{mx}+\frac{m-y}{my}=$
$=\frac{y(m+x)+x(m-y)}{mxy}=\frac{my+mx}{mxy}=$
$=\frac{m(x+y)}{mxy}=\frac{x+y}{xy}$;

3) $\frac{x-y}{x}\cdot\frac{x^2}{xy-y^2}=\frac{(x-y)x^2}{x\cdot y(x-y)}=\frac{x}{y}$;

4) $\frac{n^2}{am}:an=\frac{n^2}{am}:\frac{an}{1}=\frac{n^2}{am}\cdot\frac{1}{an}=$
$=\frac{n}{a^2m}$.

6 Сложите дроби: $\frac{a^2 + b^2}{a + b}$ и $\frac{2ab}{a + b}$.

7 Выполните сложение или вычитание:
а) $\frac{1}{2a} - \frac{1}{3a}$; б) $\frac{m}{m - n} + \frac{m}{m + n}$; в) $\frac{4x}{x^2 - y^2} - \frac{4}{x + y}$; г) $\frac{5a}{a - 5} + \frac{25}{5 - a}$; д) $2c - \frac{bc - 6}{b}$.

8 Выполните умножение: а) $\frac{x^2y}{2z} \cdot \frac{z^2}{2xy}$; б) $\frac{4b}{a^2 - b^2} \cdot \frac{a + b}{2b}$; в) $2ac \cdot \frac{3c}{4a^2}$.

9 Выполните деление: а) $\frac{m + 1}{m} : \frac{3m + 3}{m}$; б) $\frac{x^2 - xy}{y} : (x - y)$.

10 Упростите выражение:
а) $\frac{10}{a^2 - 4} - \frac{3}{a - 2} + \frac{4}{a + 2}$; б) $\frac{2c}{c - 3} - \frac{c^2 + c}{4} : \frac{c + 1}{8}$; в) $\frac{a - b}{ab} \cdot \left(\frac{a}{a - b} - \frac{a}{a + b}\right)$.

11 Выразите из формулы $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$: а) переменную a; б) переменную c.

12 Решите уравнение: $\frac{x}{3} - \frac{2x - 1}{4} = 1$.

13 Решите задачу: Турист вышел с турбазы и направился к железнодорожной станции со скоростью 4 км/ч. Через час с турбазы к станции пошёл второй турист со скоростью 5 км/ч. На станцию они пришли одновременно. Чему равно расстояние от турбазы до станции?

Степень с целым отрицательным показателем

Для $a \neq 0$ и $-n < 0$: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Для $a \neq 0$: $a^0 = 1$.

$8^{-2} = \frac{1}{8^2} = \frac{1}{64}$;

$(-5)^{-3} = \frac{1}{(-5)^3} = -\frac{1}{125}$;

$(-34{,}57)^0 = 1$.

Свойства степени с целым показателем

$a \neq 0$, m и n — целые числа:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$
$$a^m : a^n = a^{m-n};$$
$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

$2^{-7} \cdot 2^4 = 2^{-7+2} = 2^{-5}$;

$x^{-12} : x^{-4} = x^{-12-(-4)} = x^{-8}$;

$(5^{-3})^4 = 5^{-3 \cdot 4} = 5^{-12}$.

$a \neq 0$ и $b \neq 0$, n — целое число:

$$(ab)^n = a^nb^n;$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

$\left(\frac{1}{7}\right)^{-3} \cdot 21^{-3} = \left(\frac{1}{7} \cdot 21\right)^{-3} = 3^{-3} = \frac{1}{27}$;

$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{2^{-2}}{3^{-2}} = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$.

14 Представьте выражение в виде степени с основанием a: $a^{-2} \cdot a^6$; $\frac{a^3}{a^5}$; $(a^{-10})^{-3}$.

15 Упростите выражение: а) $\frac{a^{-12} \cdot a^6}{a^7}$; б) $\frac{(3x^{-2})^{-3}}{3^{-2} \cdot x^{-1}}$.

16 Запишите в стандартном виде число: а) 1 280 000; б) 0,000 007 1.

17 Сравните: а) $\frac{1{,}8 \cdot 10^9}{9 \cdot 10^{11}}$ и 0,005; б) $(1{,}4 \cdot 10^4) \cdot (2 \cdot 10^{-7})$ и 0,003.

18 Площадь территории России составляет $1{,}7 \cdot 10^7$ км^2, а Норвегии — $3{,}2 \cdot 10^5$ км^2. Во сколько раз территория России больше территории Норвегии? Ответ округлите до десятых.

ГЛАВА **2**

КВАДРАТНЫЕ КОРНИ

ВСЕРОССИЙСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Популярность математических олимпиад, которые по примеру Москвы и Ленинграда стали проводить и в других городах и областях России, привела к мысли о проведении Всероссийской математической олимпиады для школьников. Первая такая олимпиада состоялась в 1961 году.

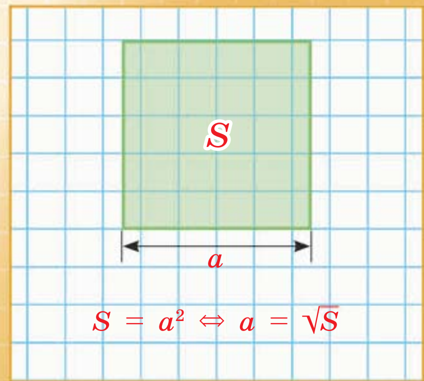
С тех пор она проводится ежегодно по этапам: первый этап — школьные соревнования, второй — олимпиады городов и районов, третий — областные олимпиады, четвёртый — итоговый всероссийский тур. Если на первых этапах могут участвовать все желающие, то в дальнейшем формируются команды из числа победителей предыдущих этапов. Команда из победителей Всероссийской олимпиады представляет Россию на Международной математической олимпиаде школьников.

Подняться на высшие ступеньки олимпийского математического пьедестала удаётся немногим. Но важно понимать, что не все победители олимпиад стали крупными математиками и далеко не все знаменитые математики в прошлом были победителями олимпиад. Помимо математических способностей, для победы требуются такие качества, как азарт, упорство, умение быстро настраиваться на новую задачу.

2.1 ЗАДАЧА О НАХОЖДЕНИИ СТОРОНЫ КВАДРАТА

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Новый математический символ и способ его прочтения.
- Формулу, выражающую длину стороны квадрата через его площадь.



Формулы $S = a^2$ и $a = \sqrt{S}$ описывают одну и ту же зависимость между величинами a и S, только выражается она разными способами. Говорят, что эти формулы *равносильны*, и пишут:

$$S = a^2 \Leftrightarrow a = \sqrt{S}.$$

Читают знак $\Leftrightarrow$ так: «тогда и только тогда», «в том и только том случае». «Равносильный» — это значит «равнозначный», «равноценный», «заменяющий нечто». Обратите внимание: если в знаке $\Leftrightarrow$ убрать стрелки, то получится знак $=$. Знак равенства, поставленный между числовыми выражениями, говорит о том, что они имеют одно и то же значение. Знак равносильности имеет такой же смысл, но применяется он для уравнений, неравенств, формул.

Зная длину стороны квадрата, по формуле $S = a^2$ можно найти его площадь. В то же время часто возникает обратная задача — по известной площади квадрата требуется найти его сторону. В математике есть формула для решения и этой задачи. Но чтобы записать эту формулу, нам придётся ввести новый символ.

ФОРМУЛА, ВЫРАЖАЮЩАЯ ДЛИНУ СТОРОНЫ КВАДРАТА ЧЕРЕЗ ЕГО ПЛОЩАДЬ Пусть требуется найти сторону квадрата, площадь которого равна 100 см^2. Так как площадь квадрата равна квадрату его стороны, то это задание можно переформулировать так: найти число, квадрат которого равен 100. Таких чисел, как известно, два: это 10 и -10. Но длина не может выражаться отрицательным числом, значит, сторона квадрата равна 10 см.

Мы подобрали положительное число, квадрат которого равен 100. В таком случае говорят, что мы *извлекли квадратный корень* из 100. И, обращая внимание на обратный переход — от числа 100 к числу 10, наряду с равенством $10^2 = 100$ пишут: $\sqrt{100} = 10$. Знак $\sqrt{}$ называют *знаком квадратного корня* (или *радикалом*), а число, записанное под знаком $\sqrt{}$, называют *подкоренным числом*. Читают выражение $\sqrt{100}$ так: *квадратный корень из 100*.

Вообще, если площадь квадрата равна S, то длина его стороны обозначается символом $\sqrt{S}$. Иными словами, $\sqrt{S}$ — это *положительное число, квадрат которого равен S*. Используя введённое обозначение, формулу для вычисления длины стороны квадрата по его площади можно записать так: $a = \sqrt{S}$.

Если, например, $S = 64$ см^2, то $a = \sqrt{64}$ см. А дальше мы можем этот квадратный корень *извлечь*, то есть найти его значение. Так как $64 = 8^2$, то $\sqrt{64} = \sqrt{8^2} = 8$. Таким образом, $a = 8$ см.

> Если нам неизвестно, квадратом какого числа является подкоренное число, то корень оставляют «невычисленным». Например, пишут $\sqrt{60}$. Запись $\sqrt{60}$ означает положительное число, квадрат которого равен 60.

ПРИМЕРЫ ИЗВЛЕЧЕНИЯ КВАДРАТНЫХ КОРНЕЙ Извлечение квадратного корня — это действие, обратное возведению в квадрат. И поэтому нахождение значений выражений вида $\sqrt{a}$ требует знания квадратов чисел. В случаях, когда под знаком корня записано натуральное число, не превосходящее 100 (как, например, в выражении $\sqrt{64}$), подобрать значение корня нетрудно — достаточно помнить таблицу умножения. В других случаях для извлечения корня приходится пользоваться «вспомогательными средствами», в частности таблицей квадратов двузначных чисел.

Пример 1. Вычислим значения следующих выражений:

$$\sqrt{1521},\ \sqrt{152\,100},\ \sqrt{15{,}21}.$$

По таблице квадратов находим, что $1521 = 39^2$. Значит, $\sqrt{1521} = \sqrt{39^2} = 39$.

Чтобы вычислить значения выражений $\sqrt{152\,100}$ и $\sqrt{15{,}21}$, будем использовать уже известный факт, что $\sqrt{1521} = 39$, а также свойства степени. Получим

$$\sqrt{152\,100} = \sqrt{1521 \cdot 100} = \sqrt{39^2 \cdot 10^2} = \sqrt{(39 \cdot 10)^2} = \sqrt{(390)^2} = 390;$$

$$\sqrt{15{,}21} = \sqrt{\frac{1521}{100}} = \sqrt{\frac{39^2}{10^2}} = \sqrt{\left(\frac{39}{10}\right)^2} = \sqrt{3{,}9^2} = 3{,}9.$$

Однако имеющейся в нашем распоряжении таблицы квадратов может оказаться недостаточно; ведь содержащиеся в ней числа содержат не более четырёх цифр. А как быть, если, например, подкоренное число пятизначное? В таком случае может помочь разложение подкоренного числа на множители.

Пример 2. Вычислим значение выражения $\sqrt{15\,876}$.

Разложим число 15 876 на простые множители, получим $15876 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 7^2 = (2 \cdot 9 \cdot 7)^2 = 126^2$.

Значит, $\sqrt{15\,876} = \sqrt{126^2} = 126$.

Пример 3. Найдём длину ребра куба, площадь поверхности которого равна 150 см^2 (***рис. 2.1***).

Площадь S поверхности куба, длина ребра которого равна a, можно вычислить по формуле $S = 6a^2$. Выразив из этой формулы сторону a, получим $a = \sqrt{\frac{S}{6}}$. Подставив в это равенство значение $S = 150$, найдём длину ребра: $a = \sqrt{\frac{150}{6}} = \sqrt{25} = 5$ (см).

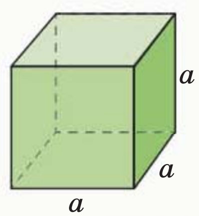


Рис. 2.1

Важно уметь читать и правильно записывать выражения, содержащие радикалы.
Помните, что знак корня, как и скобки, является группирующим символом. Если, например, требуется найти значение выражения $\sqrt{3^2 + 4^2}$, то сначала надо вычислить сумму $3^2 + 4^2$ и только потом извлечь корень: $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$.
Имейте также в виду, что множитель — числовой или буквенный — принято писать перед знаком корня, например: $0{,}3\sqrt{25}$, $x\sqrt{y}$.

К современному обозначению корня наука шла долго. В Европе математики Средневековья обозначали корень латинским словом *Radix* (*корень*) или сокращённо R. Но в 1525 г. немецкий математик К. Рудольф в своей алгебре впервые употребил обозначение, близкое к современному — символ √. Его происхождение связывают с рукописным написанием строчной формы первой буквы того же слова *Radix* (т. е. буквы r). Символ √ стал вытеснять букву R. Черта над подкоренным числом вначале отсутствовала. Её в 1637 г. в книге «Геометрия» ввёл Р. Декарт, по сути используя её взамен скобок. Вскоре черта слилась со знаком корня. Во всеобщее употребление такое обозначение корня вошло только в начале XVIII в.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Запишите формулу для вычисления длины a стороны квадрата, площадь которого равна S. Найдите a, если $S = 900$ м^2.
- Какое из равенств верно: $\sqrt{4{,}29} = 2{,}3$ или $\sqrt{5{,}29} = 2{,}3$?
- Используя таблицу квадратов двузначных чисел, вычислите: $\sqrt{2025}$; $\sqrt{202500}$; $\sqrt{20{,}25}$.
- Прочитайте выражение и найдите его значение: а) $0{,}3\sqrt{64}$; б) $\sqrt{6^2 + 8^2}$.

УПРАЖНЕНИЯ

ОСВАИВАЕМ СИМВОЛ $\sqrt{}$

134 1) Дано числовое равенство вида $a^2 = b$. Запишите соотношение между числами a и b с помощью знака $\sqrt{}$:
а) $9^2 = 81$; б) $20^2 = 400$; в) $225 = 15^2$; г) $11^2 = 121$; д) $0,04 = 0,2^2$.
2) Дано числовое равенство вида $\sqrt{a} = b$. Запишите равенство, связывающее числа a и b, не используя знак $\sqrt{}$:
а) $\sqrt{49} = 7$; б) $\sqrt{144} = 12$; в) $25 = \sqrt{625}$; г) $\sqrt{10\,000} = 100$; д) $0,5 = \sqrt{0,25}$.

135 Докажите, что верно равенство:
а) $\sqrt{196} = 14$; б) $\sqrt{2704} = 52$; в) $\sqrt{1,21} = 1,1$; г) $\sqrt{0,09} = 0,3$.

136 Извлеките квадратный корень и проверьте себя, выполнив возведение в квадрат:
а) $\sqrt{16}$; в) $\sqrt{1}$; д) $\sqrt{0,01}$; ж) $\sqrt{0,36}$; и) $\sqrt{0,0001}$;
б) $\sqrt{36}$; г) $\sqrt{100}$; е) $\sqrt{0,04}$; з) $\sqrt{0,64}$; к) $\sqrt{0,0025}$.

137 Найдите значение выражения: а) $\sqrt{\frac{1}{9}}$; б) $\sqrt{\frac{1}{81}}$; в) $\sqrt{\frac{4}{25}}$; г) $\sqrt{\frac{49}{64}}$; д) $\sqrt{\frac{81}{16}}$; е) $\sqrt{\frac{100}{121}}$.

138 1) Найдите значения следующих выражений: $\sqrt{6^2}$; $\sqrt{7^2}$; $\sqrt{20^2}$; $\sqrt{32^2}$; $\sqrt{2,58^2}$.
2) Нужно ли было для извлечения корня предварительно выполнять возведение в квадрат? Упростите выражение $\sqrt{a^2}$, где a — положительное число.

139 Найдите подкоренное число x, если известно, что:
а) $\sqrt{x} = 9$; б) $\sqrt{x} = 3$; в) $\sqrt{x} = 1$; г) $\sqrt{x} = 10$; д) $\sqrt{x} = 11$.
Проверьте себя, вычислив значение корня при найденном значении x.

140 1) Из формулы пути равноускоренного движения $S = \frac{at^2}{2}$ выразите время t.
2) Из формулы скорости свободно падающего тела $v = \sqrt{2gh}$ выразите высоту h.

Неверно! Учитель предложил классу задание: «Известно, что $\sqrt{a} = b$. Замените это равенство равносильным». Три ученика предложили такие ответы: 1) $a^2 = b^2$; 2) $a^2 = b$; 3) $a = b^2$.
Есть ли среди них верный?

ИЗВЛЕКАЕМ КВАДРАТНЫЕ КОРНИ

141 Вычислите, пользуясь таблицей квадратов двузначных чисел:
а) $\sqrt{169}$; в) $\sqrt{576}$; д) $\sqrt{\frac{36}{361}}$; ж) $\sqrt{\frac{121}{1764}}$;
б) $\sqrt{289}$; г) $\sqrt{5625}$; е) $\sqrt{\frac{1024}{81}}$; з) $\sqrt{\frac{4225}{144}}$.

Найдите значение выражения (№ 142–143):

142 а) $\sqrt{8100}$; в) $\sqrt{32\,400}$; д) $\sqrt{90\,000}$; ж) $\sqrt{4\,000\,000}$;
б) $\sqrt{22\,500}$; г) $\sqrt{25\,600}$; е) $\sqrt{1\,210\,000}$; з) $\sqrt{16\,000\,000}$.

143 а) $\sqrt{1{,}44}$; б) $\sqrt{2{,}25}$; в) $\sqrt{13{,}69}$; г) $\sqrt{56{,}25}$; д) $\sqrt{0{,}0009}$; е) $\sqrt{0{,}0081}$; ж) $\sqrt{0{,}0625}$; з) $\sqrt{0{,}1024}$.

Вычислите значение выражения (№ 144–145):

144 а) $\sqrt{17 + 4 \cdot 8}$; б) $\sqrt{5^2 + 11}$; в) $\sqrt{9^2 - 17}$; г) $\sqrt{13^2 - 12^2}$.

145 а) $\sqrt{0{,}09} + \sqrt{0{,}49}$; б) $\sqrt{0{,}04} - \sqrt{0{,}01}$; в) $0{,}5\sqrt{900}$; г) $-1{,}5\sqrt{400}$; д) $2\sqrt{0{,}81} - 2$; е) $5 - 10\sqrt{0{,}01}$.

146 Извлеките квадратный корень: а) $\sqrt{18\,225}$; б) $\sqrt{12\,544}$; в) $\sqrt{11\,025}$; г) $\sqrt{69\,696}$.

147 Найдите значение выражения:
а) $\sqrt{\sqrt{81}}$; б) $\sqrt{\sqrt{625}}$; в) $\sqrt{11 + \sqrt{25}}$; г) $\sqrt{\sqrt{49} - \sqrt{36}}$.

ВЫЧИСЛЯЕМ ЗНАЧЕНИЯ БУКВЕННЫХ ВЫРАЖЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ РАДИКАЛЫ

148 Найдите значения выражений: $a + \sqrt{b}$, $\sqrt{a} + b$, $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ и $\sqrt{a + b}$:
а) при $a = 16$ и $b = 9$; б) при $a = 2{,}25$ и $b = 0{,}64$.

149 Найдите значение выражения при значениях переменной a, равных 9; 1; $\frac{1}{4}$:
а) $a + \sqrt{a}$; б) $a - \sqrt{a}$; в) $\sqrt{a} - a$; г) $a\sqrt{a}$; д) $\frac{a}{\sqrt{a}}$; е) $\frac{\sqrt{a}}{a}$.

150 Найдите значение каждого из выражений: $a\sqrt{b}$, $b\sqrt{a}$, $\sqrt{ab}$ и $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$:
а) при $a = 100$ и $b = 81$; б) при $a = 0{,}04$ и $b = 25$; в) при $a = \frac{1}{9}$ и $b = 0{,}09$.

151 Вычислите значения выражений:
а) $\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}$, $\sqrt{a^2 + b^2}$ и $\sqrt{(a + b)^2}$ при $a = 5$ и $b = 12$;
б) $\sqrt{a^2} - \sqrt{b^2}$, $\sqrt{a^2 - b^2}$ и $\sqrt{(a - b)^2}$ при $a = 25$ и $b = 24$.

152 Найдите значение выражения:
а) $\sqrt{x + y}$ при $x = 86$ и $y = -22$; при $x = -0{,}01$ и $y = 0{,}5$;
б) $\sqrt{4 - 3x}$ при $x = -7$; -4 0; 1; $\frac{7}{12}$.

153 1) Прямоугольник составлен из шести одинаковых квадратов; длина стороны квадрата равна a. Запишите формулу для вычисления площади S прямоугольника.
2) Выразите из этой формулы сторону квадрата a через площадь прямоугольника S.
3) Используя формулу, полученную в п. 2, вычислите длину стороны квадрата, если:
а) $S = 150$ см^2; б) $S = 13{,}5$ дм^2; в) $S = 0{,}96$ м^2.

154 1) Составьте формулу для вычисления объёма V прямоугольного параллелепипеда, высота которого равна h, а основанием служит квадрат со стороной a (*рис. 2.2*).
2) Выразите из этой формулы a через V и h.
3) Используя формулу, полученную в п. 2, вычислите длину стороны основания, если:
а) $V = 400$ см^3, $h = 16$ см; б) $V = 0{,}56$ м^3, $h = 3{,}5$ м.

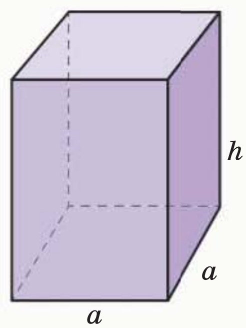


Рис. 2.2

2.2 ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- О существовании чисел, не являющихся рациональными.
- О происхождении термина «иррациональное число» и о том, что он означает.

До сих пор, вычисляя по формуле $a = \sqrt{S}$ длину стороны квадрата, площадь которого известна, вы всегда могли подобрать целое или дробное число, квадрат которого в точности равен подкоренному числу. Иными словами, вы всегда могли выразить длину стороны квадрата некоторым рациональным числом. Но в этом пункте вы узнаете, что можно построить такой квадрат, сторона которого никаким известным вам числом не выражается; а это означает, что существуют отрезки, не имеющие рациональной длины. К такому выводу более двадцати пяти веков тому назад пришли пифагорейцы — математики Древней Греции, и это открытие вызвало кризис в математической науке. Какой же выход из этой парадоксальной ситуации нашли математики?

Слово «иррациональный» происходит от латинского *irrationalis*, означающего «неразумный», «не постигаемый разумом» (приставка *ir-* используется в латинском языке для построения отрицания). Пифагорейцы считали, что в основе всеобщей гармонии мира лежат целые числа и их отношения (дроби); других чисел они не знали. И вдруг эта гармония рушится — существуют величины, которые нельзя выразить даже отношением двух целых чисел! О смятении, охватившем учёных, свидетельствует такая древняя легенда. Пифагорейцы держали своё открытие в секрете. Но Гиппас из Метапонта — бывший их товарищ — рассказал людям об «ужасной» тайне. И небо покарало его: он утонул во время шторма.

ЕЩЁ ОДНА ЗАДАЧА О НАХОЖДЕНИИ ДЛИНЫ СТОРОНЫ КВАДРАТА Начертим квадрат со стороной, равной 1, и построим ещё один квадрат, стороной которого будет диагональ этого единичного квадрата (***рис. 2.3***). Из рисунка видно, что площадь нового квадрата в два раза больше площади единичного квадрата, значит, она равна 2 кв. ед. А какова длина стороны этого квадрата?

Обозначим искомую длину буквой a. Тогда $a^2 = 2$. Попробуем найти число, удовлетворяющее этому условию. Ясно, что число a не может быть целым. В самом деле, $1^2 < 2$, а $2^2 > 2$, т. е. $1 < a < 2$, но целых чисел, заключённых между 1 и 2, нет.

Допустим, что a — дробное число. Тогда его можно записать в виде несократимой дроби $\frac{p}{q}$, знаменатель которой не равен 1. Числа p и q не имеют общих делителей, отличных от 1 (иначе дробь $\frac{p}{q}$ можно было бы сократить). Но тогда и числа p^2 и q^2 также не будут иметь общих делителей, а значит, дробь $\frac{p^2}{q^2}$ также является несократимой, причём её знаменатель не равен 1.

Однако несократимая дробь со знаменателем, не равным 1, не может быть равна целому числу 2, и мы, как говорят математики, пришли к противоречию.

Наше рассуждение доказывает следующий факт:

> **!** нет ни целого, ни дробного числа, квадрат которого равен 2.

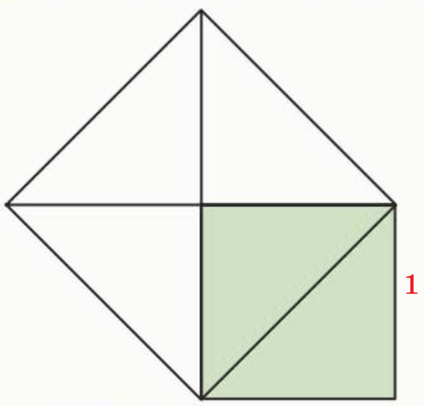


Рис. 2.3

Но раз имеющегося запаса чисел — целых и дробных — не хватает для выражения длин отрезков, значит, нужны какие-то другие числа. Так появились новые, не рациональные числа. Ещё в древности их назвали **иррациональными**. И длина стороны квадрата, площадь которого равна 2, выражается иррациональным числом. Для него у нас уже есть символ: используя формулу $a = \sqrt{S}$, можно записать, что $a = \sqrt{2}$.

Число 2 не единственное рациональное число, которое нельзя представить ни в виде квадрата целого, ни в виде квадрата дробного числа. Чисел, обладающих таким же свойством, очень много даже среди натуральных. Их можно получить, если из натурального ряда исключить квадраты целых чисел. Тогда останутся числа

$$2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 10,\ 11,\ 12,\ \ldots.$$

При извлечении квадратных корней из этих чисел получаются иррациональные числа:

$$\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{5},\ \sqrt{6},\ \sqrt{7},\ \sqrt{8},\ \sqrt{10},\ \sqrt{11},\ \sqrt{12},\ \ldots.$$

Квадраты этих чисел равны 2, 3, 5, 6, ...:

$$(\sqrt{2})^2 = 2,\ (\sqrt{3})^2 = 3,\ (\sqrt{5})^2 = 5,\ (\sqrt{6})^2 = 6,\ \ldots.$$

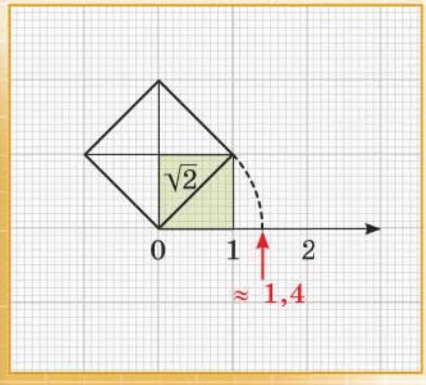


Рис. 2.4

Если положительное число a не является квадратом натурального или дробного числа, то $\sqrt{a}$ — число иррациональное.

ДЕСЯТИЧНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ КВАДРАТНЫХ КОРНЕЙ Число $\sqrt{2}$ — это *точное значение* длины стороны квадрата, площадь которого равна 2. В то же время на практике иррациональные квадратные корни заменяют их *десятичными приближениями*.

Так, из рисунка ***2.4*** видно, что $\sqrt{2}$ — это примерно 1,4. Выполним для проверки возведение в квадрат: $1{,}4^2 = 1{,}96$. Мы, естественно, получили результат, отличающийся от числа 2, хотя и близкий к нему.

Существуют разные способы приближённого вычисления квадратных корней. Рассмотрим один из них. В его основу положено следующее утверждение: *если числа a и b положительные* и $a^2 < b^2$, то $a < b$. С геометрической точки зрения это очевидно: квадрат с меньшей площадью имеет и меньшую сторону.

Возьмём, например, число $\sqrt{40}$. Так как $6^2 < 40 < 7^2$, то $6 < \sqrt{40} < 7$. Таким образом, $\sqrt{40} \approx 6$ (с недостатком) и $\sqrt{40} \approx 7$ (с избытком).

Чтобы получить более точные приближения, будем последовательно возводить в квадрат числа 6,1; 6,2; 6,3; ..., пока не получим число, большее 40:

$$6{,}1^2 = 37{,}21;\ 6{,}2^2 = 38{,}44;\ 6{,}3^2 = 39{,}69;\ 6{,}4^2 = 40{,}96.$$

Так как $6{,}3^2 < 40 < 6{,}4^2$, то $6{,}3 < \sqrt{40} < 6{,}4$. Значит, $\sqrt{40} \approx 6{,}3$ (с недостатком) и $\sqrt{40} \approx 6{,}4$ (с избытком).

Продолжая оценку числа $\sqrt{40}$, мы будем получать всё более и более точные его приближения:

$$6{,}32 < \sqrt{40} < 6{,}33;\ 6{,}324 < \sqrt{40} < 6{,}325 \text{ и т. д.}$$

Этот процесс бесконечен: хотя приближения слева и справа всё ближе и ближе «подкрадываются» к $\sqrt{40}$, никакое из них с этим числом не совпадёт — в противном случае число $\sqrt{40}$ оказалось бы рациональным.

В практических расчётах для приближённого извлечения корней вы можете пользоваться калькулятором, на корпусе которого есть кнопка $\sqrt{\ }$. Если у вас восьмиразрядный калькулятор, то, вычислив $\sqrt{40}$, вы получите один из результатов: 6,3245553 или 6,3245554; какой именно — зависит от марки калькулятора. Это число можно «оборвать», взяв приближение корня с нужным количеством десятичных знаков.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Приведите примеры чисел вида $\sqrt{a}$, которые являются:
  1) рациональными числами;
  2) иррациональными числами.
- Объясните, как найти два целых числа, между которыми заключено число $\sqrt{75}$.
- Какое из двойных неравенств верно:
  $5{,}3 < \sqrt{30} < 5{,}4$ или
  $5{,}4 < \sqrt{30} < 5{,}5$?

УПРАЖНЕНИЯ

РАСПОЗНАЁМ РАЦИОНАЛЬНЫЕ И ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ КОРНИ

155 Каким числом — рациональным или иррациональным — является значение выражения:

$$\sqrt{4};\ \sqrt{40};\ \sqrt{5};\ \sqrt{25};\ \sqrt{10};\ \sqrt{10000};\ \sqrt{18};\ \sqrt{81};\ \sqrt{9000};\ \sqrt{900}?$$

156 Найдите значение выражения:

$$(\sqrt{9})^2,\ (\sqrt{36})^2,\ (\sqrt{8})^2,\ (\sqrt{28})^2,\ (\sqrt{49})^2,\ (\sqrt{55})^2.$$

157 Представьте в виде квадрата некоторого числа все натуральные числа:
а) от 1 до 10; б) от 11 до 20.
Сколько чисел в каждом из промежутков являются квадратами иррациональных чисел?

158 Значения каких из данных выражений — числа рациональные:

$$5\sqrt{36};\quad 6\sqrt{0{,}5};\quad 0{,}5\sqrt{\frac{4}{49}};\quad 100\sqrt{0{,}0016};\quad 3\sqrt{6{,}4};\quad 2\sqrt{500}?$$

НАХОДИМ ДЕСЯТИЧНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ КВАДРАТНЫХ КОРНЕЙ

Между какими последовательными целыми числами заключено значение квадратного корня (№ 159–160)?

159 а) $\sqrt{18}$; б) $\sqrt{15}$; в) $\sqrt{27}$; г) $\sqrt{35}$; д) $\sqrt{62}$; е) $\sqrt{90}$.

160 а) $\sqrt{110}$; б) $\sqrt{150}$; в) $\sqrt{200}$; г) $\sqrt{870}$; д) $\sqrt{1000}$; е) $\sqrt{2085}$.

161 1) Перечертите таблицу в тетрадь и заполните её, указывая приближённое значение $\sqrt{n}$ с тремя знаками после запятой. (Для приближённого вычисления квадратных корней используйте калькулятор.)

n	$\sqrt{n}$	n	$\sqrt{n}$	n	$\sqrt{n}$	n	$\sqrt{n}$
1	1	6		11		16	
2	1,414	7		12		17	
3		8		13		18	
4		9		14		19	
5		10		15		20	

2) Пользуясь заполненной таблицей, сравните: $\sqrt{8}$ и $\sqrt{5}$, $\sqrt{17}$ и $\sqrt{13}$, $\sqrt{19}$ и $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$ и $\sqrt{7}$. Как меняется значение выражения $\sqrt{n}$ с увеличением n?
3) Как вы думаете, что больше: $\sqrt{80}$ или $\sqrt{90}$? $\sqrt{168}$ или $\sqrt{104}$? Проверьте себя с помощью калькулятора.

162 Площадь квадрата равна 10 см^2. Чему равна длина его стороны? (Дайте точный ответ, записав его с помощью знака $\sqrt{\ }$, и приближённый, выразив результат десятичной дробью с одним знаком после запятой.) Начертите квадрат, площадь которого примерно равна 10 см^2.

163 Площадь S равнобедренного прямоугольного треугольника с катетом, равным a, вычисляется по формуле $S = \frac{a^2}{2}$. Выразите из этой формулы катет a. Какой должна быть длина катета, чтобы площадь треугольника была равна 10 см^2? (Дайте точный ответ, а затем приближённый, выразив его десятичной дробью с одним знаком после запятой.) Начертите равнобедренный прямоугольный треугольник, площадь которого примерно равна 10 см^2.

164 Площадь S круга радиуса r вычисляется по формуле $S = \pi r^2$. Выразите из этой формулы радиус r. Каким должен быть радиус круга, чтобы его площадь равнялась 10 см^2? (Ответ дайте приближённый, с одним знаком после запятой. Возьмите $\pi \approx 3{,}14$.) Начертите круг, площадь которого примерно равна 10 см^2.

165 Сколько секунд будет падать сосулька с крыши 22-этажного дома, высота которого 68 м? (Воспользуйтесь формулой $h = \frac{gt^2}{2}$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, g — ускорение свободного падения, примерно равное 9,8 м/с^2.)

166 Найдите с помощью калькулятора десятичное приближение числа с двумя знаками после запятой:

а) $\sqrt{\sqrt{2}}$; б) $\sqrt{\sqrt{10}}$; в) $0{,}5\sqrt{\sqrt{8}}$; г) $\sqrt{0{,}9\sqrt{2}}$; д) $\sqrt{3 + \sqrt{2}}$; е) $\sqrt{\sqrt{15} - 3}$.

167 1) Знаменитым иррациональным числом является число $\Phi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$, выражающее отношение длин отрезков, которое называют *золотым сечением*. Это отношение часто использовалось в древней архитектуре и искусстве. Найдите с помощью калькулятора десятичные приближения числа Φ с одним, двумя и тремя знаками после запятой.

2) Разделите отрезок, равный 10 см, на две части в отношении, равном золотому сечению. (Возьмите приближение числа Φ с одним знаком после запятой.)

168 МАТЕМАТИКА ВОКРУГ НАС Цирковой манеж имеет форму круга — это обусловлено потребностями конной акробатики. Размеры манежа традиционно одни и те же. Вычислите диаметр манежа, зная, что его площадь примерно составляет 133 м^2. (Для вычисления воспользуйтесь формулой площади круга $S = \frac{\pi d^2}{4}$. Ответ округлите до целых.)

169 **ЗАДАЧА-ИССЛЕДОВАНИЕ**

Когда вы находите перебором все делители некоторого натурального числа, удобно выписывать пары: делитель и соответствующее частное, которое также является делителем данного натурального числа.

1) Пользуясь этим приёмом, найдите все делители числа: 18, 36, 50.

2) Приведите пример натурального числа a, делителем которого является число $\sqrt{a}$.

3) Докажите, что если один из пары делителей натурального числа a меньше $\sqrt{a}$, то другой больше $\sqrt{a}$.

4) Перебором каких натуральных чисел можно ограничиться для нахождения всех делителей числа a? До какого числа следует осуществить перебор для нахождения всех делителей числа 144? 238?

2.3 ЕЩЁ НЕМНОГО ОБ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЛАХ

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Что иррациональные числа могут быть отрицательными.
- Что на координатной прямой есть бесконечное множество точек с иррациональными координатами.

Со временем древние греки стали проявлять большой интерес к иррациональным числам. Феодор из Кирены (V в до н.э.) доказал иррациональность чисел $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ и т. д., вплоть до $\sqrt{15}$. А философ и математик Теэтет, живший в Афинах (IV в до н.э.), обосновал иррациональность всех чисел вида $\sqrt{n}$, где n — целое число, не являющееся точным квадратом. Он также изучал различные выражения, которые можно составить из натуральных чисел с помощью арифметических действий и извлечения квадратного корня. В современных обозначениях это были выражения вида

$$a \pm \sqrt{b},\ \sqrt{a} \pm \sqrt{b},\ \sqrt{a \pm \sqrt{b}}.$$

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Найдите приближённое десятичное значение с двумя знаками после запятой числа:
а) $-\sqrt{5}$; б) $-\sqrt{10}$; в) $-\sqrt{70}$.
- Между какими последовательными целыми числами заключено число $-\sqrt{20}$? Запишите ответ в виде двойного неравенства. Отметьте это число на координатной прямой.

Иррациональные числа появляются не только в связи с квадратными корнями. Существует бесконечно много иррациональных чисел и другого происхождения. Например, в формулах длины окружности и площади круга $c = \pi d$ и $S = \pi r^2$ используется иррациональное число π, которое выражает отношение длины окружности к её диаметру. В вычислениях вы обычно заменяли его приближённым значением, равным 3,14.

ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА Иррациональные числа, так же как и рациональные, могут быть и положительными, и отрицательными. Отрицательное иррациональное число получается из соответствующего положительного приписыванием знака «минус»:

$$-\sqrt{2};\ -\sqrt{3};\ -\sqrt{40};\ -\sqrt{62{,}1};\ -\pi.$$

Иррациональные числа, различающиеся только знаками, такие, как $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$, называют *противоположными*. Если вам известно десятичное приближение положительного иррационального числа, то вы знаете и приближённое значение противоположного ему отрицательного числа. Например:

$$\sqrt{2} \approx 1{,}4,\ \text{а}\ -\sqrt{2} \approx -1{,}4; \qquad \sqrt{40} \approx 6{,}3,\ \text{а}\ -\sqrt{40} \approx -6{,}3.$$

КООРДИНАТНАЯ ПРЯМАЯ Любому рациональному числу — целому или дробному — соответствует точка на координатной прямой. Представьте, что все рациональные числа нанесены на координатную прямую. Вся ли прямая будет заполнена? Оказывается, нет: некоторые точки (а на самом деле очень многие) останутся свободными. Их координаты — иррациональные числа. Отложим, например, вправо от точки O отрезок, равный диагонали единичного квадрата (**рис. 2.5**). Координата его конца — число $\sqrt{2}$ — является иррациональным.

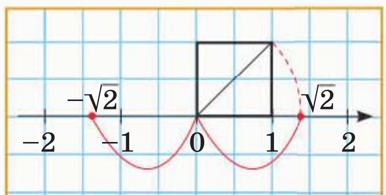


Рис. 2.5

МНОЖЕСТВО ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ Рациональные и иррациональные числа вместе образуют так называемое **множество действительных чисел**. Геометрическим образом множества действительных чисел является координатная прямая: каждой точке координатной прямой соответствует некоторое действительное число (рациональное или иррациональное); и наоборот, каждому действительному числу соответствует точка на координатной прямой.

УПРАЖНЕНИЯ

ИЗОБРАЖАЕМ ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА ТОЧКАМИ НА КООРДИНАТНОЙ ПРЯМОЙ

170 1) Покажите на координатной прямой примерное положение чисел $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{20}$. (За единичный отрезок примите 5 клеток.)
2) Какие из этих чисел принадлежат промежутку от 2 до 3? от 4 до 5?

171 Какая из точек, отмеченных на координатной прямой (***рис. 2.6***), соответствует числу $\sqrt{40}$? $\sqrt{70}$?

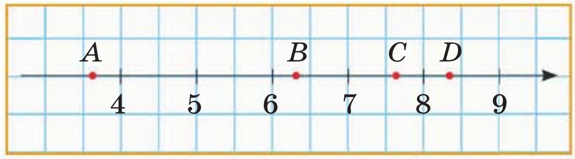


Рис. 2.6

172 Покажите на координатной прямой примерное положение пары противоположных чисел: $\sqrt{8}$ и $-\sqrt{8}$; $\sqrt{12}$ и $-\sqrt{12}$; $\sqrt{15}$ и $-\sqrt{15}$; $\sqrt{0,5}$ и $-\sqrt{0,5}$.

173 Какая из точек координатной прямой ближе к началу отсчёта:
а) $\sqrt{4}$ или $-\sqrt{2}$; б) $-\sqrt{3,5}$ или $\sqrt{9}$; в) $\sqrt{6}$ или $-\sqrt{3}$; г) $-\sqrt{4,5}$ или $-\sqrt{5}$?

174 1) Отметьте на координатной прямой точку, соответствующую числу $\sqrt{13}$.
2) На той же координатной прямой отметьте точки, соответствующие числам: $\sqrt{13} - 3$; $\sqrt{13} - 4$; $\sqrt{13} - 6$. В каждом случае укажите два последовательных целых числа, между которыми заключено данное число.

СРАВНИВАЕМ ЧИСЛА

175 1) Разберите два способа сравнения чисел 4 и $\sqrt{15}$.

Способ 1
Представим число 4 в виде корня:
$$4 = \sqrt{16}.$$
Так как $\sqrt{16} > \sqrt{15}$, то $4 > \sqrt{15}$.

Способ 2
Найдём квадраты данных чисел:
$$4^2 = 16 \text{ и } (\sqrt{15})^2 = 15.$$
Так как $4^2 > (\sqrt{15})^2$, то $4 > \sqrt{15}$.

2) Воспользуйтесь любым из рассмотренных способов и сравните:
а) 3 и $\sqrt{11}$; б) 5 и $\sqrt{20}$; в) 11 и $\sqrt{110}$; г) 17 и $\sqrt{299}$; д) 22 и $\sqrt{484}$; е) 35 и $\sqrt{1225}$.

176 Не используя калькулятор, найдите натуральное число, ближайшее к данному квадратному корню: а) $\sqrt{50}$; б) $\sqrt{22}$; в) $\sqrt{9,2}$; г) $\sqrt{33,7}$; д) $\sqrt{80,02}$.

177 Найдите два натуральных числа, между которыми заключено указанное число, и определите, к какому из них оно ближе: а) $\sqrt{74,25}$; б) $\sqrt{20,42}$.

178 Какие целые числа заключены между числами: а) $\sqrt{10}$ и $\sqrt{20}$; б) $\sqrt{40}$ и $\sqrt{80}$; в) $\sqrt{7}$ и $\sqrt{70}$? В каждом случае запишите ответ в виде цепочки неравенств.

Неверно! Опровергните утверждения, приведя контрпримеры:
1) Не существует иррационального числа, заключённого между числами 2 и 3;
2) Не существует рационального числа, заключённого между числами $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$.

2.4 ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

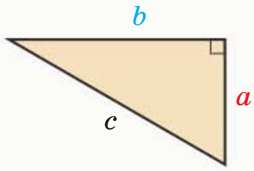
ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Какое соотношение между сторонами прямоугольного треугольника устанавливает теорема Пифагора.
- О том, что теорема Пифагора позволяет находить длину отрезка, не измеряя его непосредственно.

Теорема Пифагора — одно из самых знаменитых положений геометрии. Она проста, красива и чрезвычайно значима для геометрии и для математики в целом. Хотя эта теорема и названа именем древнегреческого математика и философа, жившего более 25 веков тому назад, история её началась задолго до самого Пифагора. Известно, что в той или иной форме она использовалась всеми древними народами. Но представить себе эту теорему отдельно от имени великого грека уже невозможно.

ФОРМУЛИРОВКА И ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ПИФАГОРА

Рис. 2.7



$c^2 = a^2 + b^2$

Напомним, что сторона прямоугольного треугольника, лежащая против прямого угла, называется **гипотенузой**, а две другие стороны — **катетами**. Теорема Пифагора устанавливает соотношение, связывающее катеты и гипотенузу (**рис. 2.7**). В современной формулировке она звучит так:

> **!** квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Доказательство. В доказательстве теоремы Пифагора используются формулы для вычисления площадей, т. е. в нём геометрия сочетается с алгеброй. На рисунке **2.8** четыре равных прямоугольных треугольника с катетами a и b и гипотенузой c расположены так, что их стороны образуют два квадрата: большой со стороной $a + b$ и малый со стороной c. Из рисунка ясно, что $c^2 = (a+b)^2 - 4\cdot\frac{ab}{2}$. Так как $(a+b)^2 - 4\cdot\frac{ab}{2} = a^2 + 2ab + b^2 - 2ab = a^2 + b^2$, то $c^2 = a^2 + b^2$.

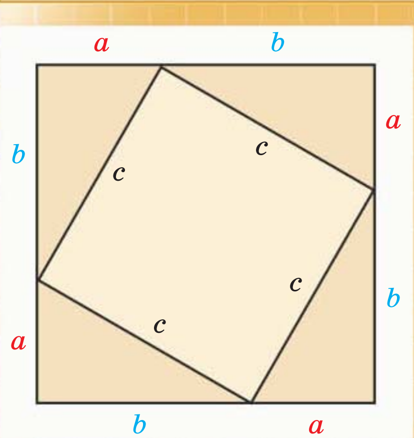


Рис. 2.8

Пример 1. Найдём гипотенузу прямоугольного треугольника, катеты которого равны 3 и 4.

Из формулы $c^2 = a^2 + b^2$ выразим гипотенузу c:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Подставив значения a и b, получим

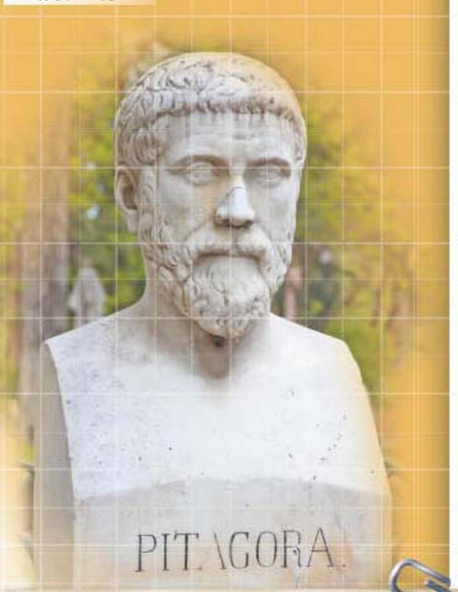
$$c = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

Таким образом, если катеты прямоугольного треугольника равны 3 и 4, то его гипотенуза равна 5.

Пример 2. Найдём гипотенузу прямоугольного треугольника, катеты которого равны 2 и 4.

Подставив в формулу $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ значения a и b, получим $c = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$.

Значит, если катеты равны 2 и 4, то гипотенуза равна $\sqrt{20}$.

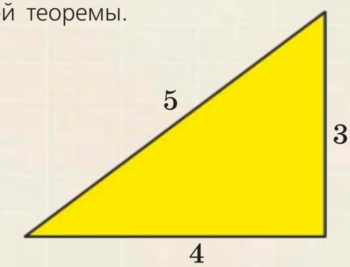


Пифагор (VI в. до н.э.), древнегреческий философ и математик, основатель пифагорейской школы. Считается, что Пифагор дал первое доказательство теоремы, носящей его имя.

В первом примере, задавшись целыми значениями длин катетов a и b, мы получили, что длина гипотенузы также выражается целым числом. Однако чаще, выбрав целые значения катетов a и b, мы выясним, как это было в примере 2, что длина гипотенузы выражается иррациональным числом.

Целые числа 3, 4 и 5, удовлетворяющие равенству $a^2 + b^2 = c^2$, образуют так называемую «пифагорову тройку». Вот ещё примеры троек чисел, обладающих таким же свойством: 5, 12 и 13; 6, 8 и 10. «Пифагоровых троек» бесконечно много, однако только одну из них образуют последовательные целые числа.

Прямоугольный треугольник со сторонами 3, 4, 5 обычно называют *египетским треугольником*; такое название ему дали эллины. Известно, что Пифагор отправился в Египет для изучения астрономии и математики. Треугольник с отношением сторон 3:4:5, применялся египетскими землемерами и архитекторами для построения прямых углов. Видимо, попытка обобщения соотношения сторон, характерного для египетского треугольника, на любые прямоугольные треугольники, привела Пифагора к доказательству знаменитой теоремы.



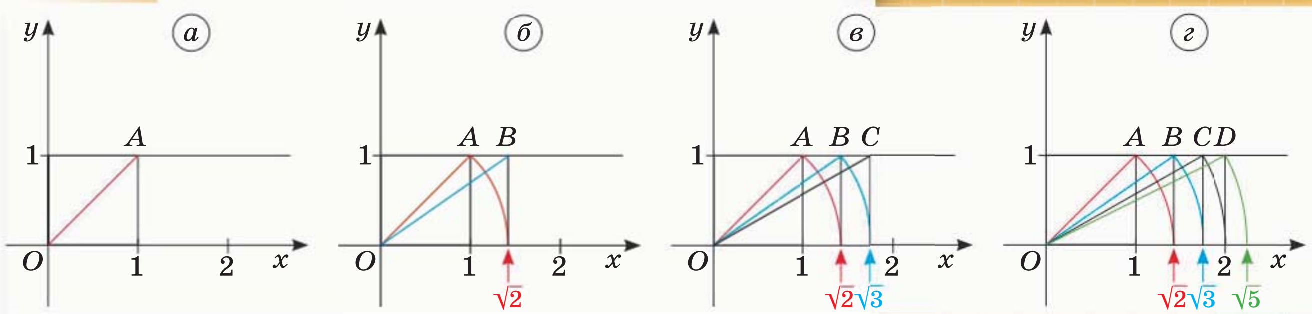
ПОСТРОЕНИЕ ОТРЕЗКОВ С ИРРАЦИОНАЛЬНЫМИ ДЛИНАМИ

Теорему Пифагора можно использовать для построения отрезков с длинами, равными $\sqrt{n}$, где n — натуральное число.

На рисунке ***2.9, а*** построен равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами, равными 1. Длина его гипотенузы OA равна $\sqrt{2}$. Действительно,

$$OA = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Рис. 2.9



На рисунке ***2.9, б*** точка, соответствующая числу $\sqrt{2}$, нанесена на координатную прямую.

Теперь легко отметить точку с координатой $\sqrt{3}$: отрезок OB (***рис. 2.9, б***) является гипотенузой прямоугольного треугольника, катеты которого равны $\sqrt{2}$ и 1. Поэтому $OB = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{2 + 1} = \sqrt{3}$. На рисунке ***2.9, в*** точка с координатой $\sqrt{3}$ нанесена на координатную прямую.

Далее, отрезок OC — это гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами $\sqrt{3}$ и 1 (***рис. 2.9, в***). Поэтому $OC = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3 + 1} = \sqrt{4} = 2$.

Затем строим точку с координатой $\sqrt{5}$ (***рис. 2.9, г***): $OD = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.

Следующим шагом будет построение точки с координатой $\sqrt{6}$, затем — с координатой $\sqrt{7}$ и т. д.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Сформулируйте теорему Пифагора и запишите это утверждение на алгебраическом языке.
- Чему равна гипотенуза прямоугольного треугольника, у которого катеты равны 3 и 4 единицам? Что вам известно об этом треугольнике?
- Из равенства $c^2 = a^2 + b^2$ выразите катет a. Найдите a, если $c = 10$ и $b = 6$.

УПРАЖНЕНИЯ

ПРИМЕНЯЕМ ТЕОРЕМУ ПИФАГОРА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ДЛИН ОТРЕЗКОВ

179 Найдите длину стороны прямоугольного треугольника, обозначенную буквой x (***рис. 2.10***). Каким числом выражается длина — рациональным или иррациональным? Есть ли на рисунке треугольники, длины сторон которых образуют «пифагоровы тройки»?

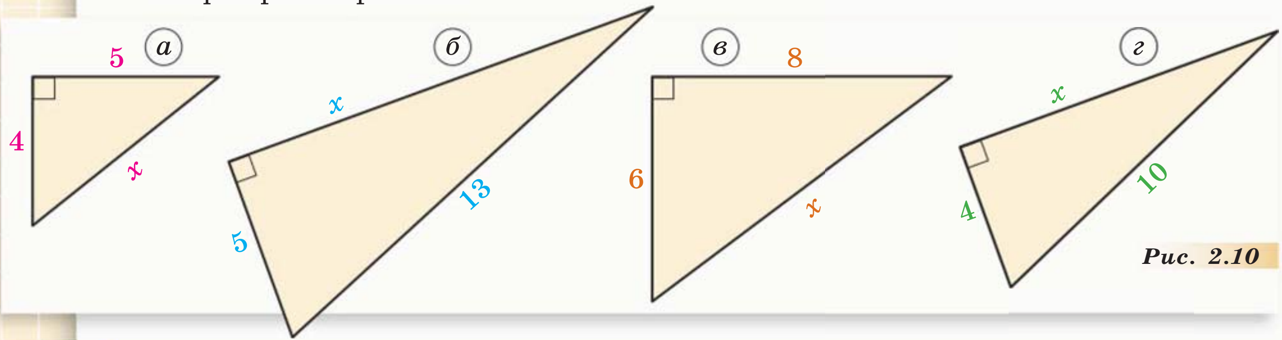


Рис. 2.10

180 Диагональ телевизионного экрана 50 см, длины его сторон относятся как 3:4. Каковы стороны этого экрана?

181 Велосипедист проехал из пункта M в пункт N по двум улицам (***рис. 2.11***). Какое расстояние он проехал? Если бы можно было проехать напрямик, то на сколько примерно метров оказался бы короче его путь?

Рис. 2.11

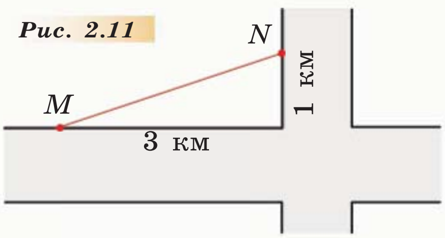
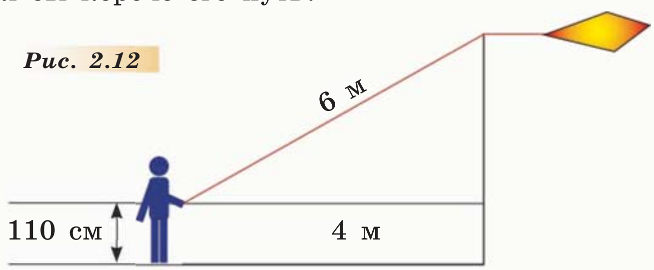


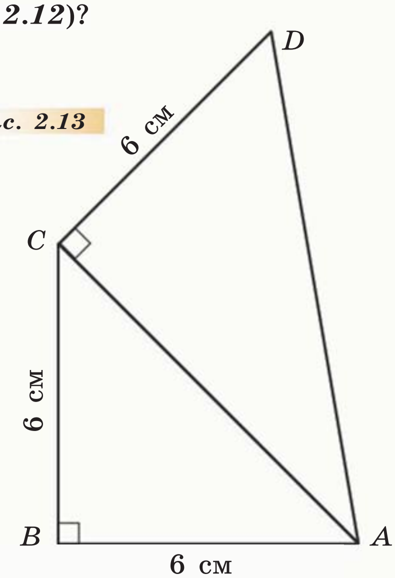
Рис. 2.12



182 На какой высоте находится воздушный змей (***рис. 2.12***)? Дайте ответ в метрах, округлив его до десятых.

183 1) На рисунке ***2.13*** показано построение отрезка AD. По данным рисунка найдите длину этого отрезка. (Составьте план решения задачи и выполните вычисления.)
2) Запишите формулу, выражающую длину отрезка AD через длины отрезков AC, BC и CD.

Рис. 2.13



184 1) Найдите диагональ квадрата, если известно, что его площадь равна: а) 25 см^2; б) 30 см^2. В каждом случае дайте два ответа: точный и приближённый, округлив приближённое значение до десятых долей сантиметра.
2) Запишите формулу, выражающую длину d диагонали квадрата через его площадь S.

Решите задачу, предварительно сделав по её условию схематический рисунок. Если ответ задачи выражается иррациональным числом, то укажите его десятичное приближение с одним знаком после запятой (№ 185–189):

185 К стене приставлена лестница длиной 5 м. Основание лестницы находится в 2 м от стены. На каком расстоянии от земли находится её верхний конец?

186 Сквер в форме прямоугольника имеет длину 15 м и ширину 9 м. Какова длина прямой дорожки, пересекающей сквер по его диагонали?

187 Какова наибольшая длина трости, которую можно поместить на дно чемодана размером 80×60 см? Как надо расположить эту трость?

188 Можно ли трость длиной 100 см поместить в коробку, длина которой 80 см, ширина 30 см и высота 50 см?

189 Группа туристов прошла от своего лагеря 1,6 км на запад, потом 3,2 км на север, а затем повернула на восток, пройдя при этом большее расстояние, чем на запад. После этого группа остановилась на ночлег. Точка ночлега находится в 6,4 км от лагеря. Сколько километров туристы шли в восточном направлении?

190 МАТЕМАТИКА ВОКРУГ НАС Дизайнер парка, планируя размещение тюльпанов на клумбе, сделал для рабочих специальную разметку (*рис. 2.14*). Луковицы должны быть высажены по пунктирным линиям на расстоянии 20 см друг от друга. Линии посадки ограничены с концов двумя перпендикулярными направляющими с нанесёнными на них метками; цена одного деления составляет 1 м. Сколько всего должно быть высажено луковиц тюльпанов?

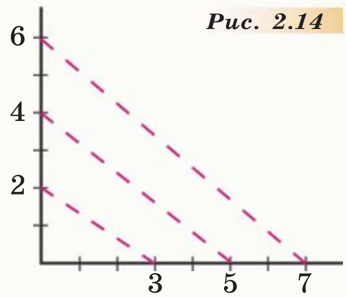


Рис. 2.14

СТРОИМ ОТРЕЗКИ С ИРРАЦИОНАЛЬНЫМИ ДЛИНАМИ

191 Воспользовавшись приёмом, описанным в учебнике на с. 51, отметьте на координатной прямой числа $\sqrt{3}$ и $\sqrt{6}$. (Единичный отрезок возьмите равным 2 клеткам.) Найдите по рисунку приближённые значения этих квадратных корней и сопоставьте их с приближениями, найденными с помощью калькулятора.

192 **ЗАДАЧА-ИССЛЕДОВАНИЕ**

На рисунке ***2.15*** шесть отрезков имеют длину, равную 1.

1) Найдите длины отрезков AB, AD, AE, AF, AG.

2) Постройте такую же фигуру в тетради и, продолжив построение, получите отрезок длиной $\sqrt{8}$.

3) Отрезки длиной $\sqrt{10}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{17}$ можно получить, продолжив построение по рассмотренному алгоритму. Но для этих длин есть путь короче. Попробуйте найти его и выполните построение.

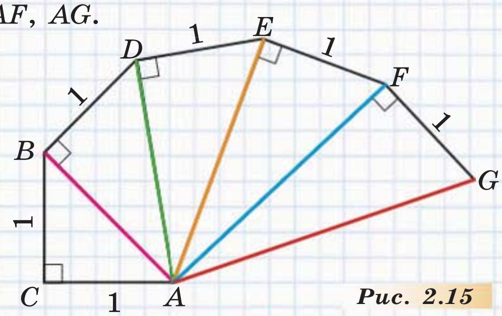


Рис. 2.15

2.5 КВАДРАТНЫЙ КОРЕНЬ: АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ПОДХОД

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Что означают термины «квадратный корень» и «арифметический квадратный корень».
- Сколько корней и в каких случаях имеет уравнение вида $x^2 = a$.

Обратите внимание на совпадение в терминах — квадратный корень (иначе — радикал) и корень уравнения. Оно не случайно. Уравнения вида $x^2 = a$ исторически были первыми «сложными» уравнениями, и их решения были названы корнями, возможно, по метафоре: из стороны квадрата, как из корня, вырастает сам квадрат. Этот термин стал употребляться в дальнейшем и для произвольных уравнений. Название «радикал» тоже связано с термином «корень»: как уже говорилось, по-латыни слово «корень» — *radix* (он же редис — корнеплод). Заметим также, что слово «радикальный» в русском языке является синонимом слова «коренной».

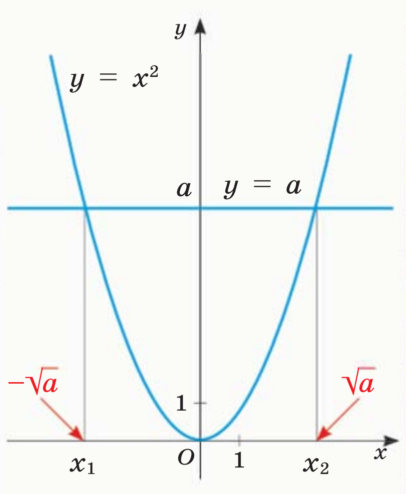


Рис. 2.16

Вернёмся ещё раз к задаче о нахождении стороны квадрата по его площади, но теперь переведём её условие на язык алгебры, составив уравнение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КВАДРАТНОГО КОРНЯ Пусть площадь квадрата равна 36 см². Чему равна длина его стороны?

Обозначим длину стороны квадрата (в сантиметрах) через x. Приходим к уравнению $x^2 = 36$.

Корнем уравнения $x^2 = 36$ является любое число, квадрат которого равен 36. Однако длина отрицательным числом выражаться не может, поэтому ответом может служить только положительный корень. Понятно, что это число 6, так как $6^2 = 36$. Но уравнению $x^2 = 36$ вместе с числом 6 удовлетворяет и число −6; в самом деле, $(-6)^2 = 36$. Оба корня уравнения $x^2 = 36$, т. е. числа 6 и −6, квадраты которых равны 36, называют *квадратными корнями* из 36.

Уравнение, которое мы решали, имеет вид $x^2 = a$, где x — переменная, a — некоторое число. Всякое число, являющееся корнем такого уравнения, называют **квадратным корнем из числа a**. Иными словами:

> **!** число b называют квадратным корнем из числа a, если $b^2 = a$.

ДЛЯ ЛЮБОГО ЛИ ЧИСЛА a СУЩЕСТВУЕТ КВАДРАТНЫЙ КОРЕНЬ?

Для a, равного 36, мы указали два квадратных корня — числа 6 и −6. А как обстоит дело в общем случае: для любого ли числа a можно найти число, квадрат которого равен a, и сколько таких чисел существует? Чтобы выяснить это, рассмотрим три случая: $a > 0$, $a = 0$ и $a < 0$.

1) Пусть $a > 0$. Будем рассуждать с опорой на график. Построим в координатной плоскости график зависимости $y = x^2$ — знакомую вам параболу, и проведём горизонтальную прямую $y = a$ (**рис. 2.16**). Рисунок отражает важное свойство параболы: её ветви неограниченно «уходят» вверх, и любая горизонтальная прямая, расположенная выше оси x, пересекает параболу в двух точках, симметричных относительно оси y.

Ордината каждой точки пересечения параболы и прямой равна a. Обозначим абсциссы этих точек через x_1 и x_2. Так как точки пересечения принадлежат параболе, то верны равенства $x_1^2 = a$ и $x_2^2 = a$. Но в соответствии с определением квадратного корня это как раз и означает, что числа x_1 и x_2 являются квадратными корнями из числа a.

Таким образом, *если a — положительное число, то существуют два квадратных корня из a*. Эти квадратные корни — числа противоположные. Для них у нас уже есть обозначения: $\sqrt{a}$ и $-\sqrt{a}$ (см. ***рис. 2.16***)

2) Пусть $a = 0$. Вы знаете, что есть только одно число, квадрат которого равен 0, — это само число 0. Таким образом, *квадратный корень из нуля единственный, и он равен* 0. Обозначение $\sqrt{a}$ сохраняется и для $a = 0$, т. е. верно равенство $\sqrt{0} = 0$.

3) Пусть $a < 0$. Как известно, квадрат любого числа либо положителен, либо равен 0. Иными словами, нет такого числа, квадрат которого был бы равен отрицательному числу. Таким образом, *квадратный корень из отрицательного числа не существует*.

> Квадратный корень из числа a существует, если выполняется условие $a \geq 0$.
> Если $a > 0$, то квадратных корней два; один из них положительный, а другой отрицательный.
> Если $a = 0$, то квадратный корень единственный, и он равен 0.

Неотрицательный квадратный корень из числа a (т. е. положительный или равный 0) называют **арифметическим квадратным корнем**. Именно арифметический квадратный корень из числа a обозначают символом $\sqrt{a}$. Для краткости прилагательное «арифметический» часто опускают и называют выражение $\sqrt{a}$ просто квадратным корнем.

> Помните:
> - выражение $\sqrt{a}$ имеет смысл при любом $a \geq 0$; если $a < 0$, то выражение $\sqrt{a}$ смысла не имеет;
> - символом $\sqrt{a}$ обозначают число неотрицательное, то есть при любом допустимом a верно неравенство $\sqrt{a} \geq 0$;
> - при любом a, при котором выражение $\sqrt{a}$ имеет смысл, выполняется равенство $(\sqrt{a})^2 = a$.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ВИДА $x^2 = a$ Результаты, которые мы получили, исследуя вопрос о квадратных корнях из произвольного числа a, можно сформулировать иначе, рассматривая их по отношению к уравнению $x^2 = a$:
- если $a > 0$, то уравнение $x^2 = a$ имеет два корня: $\sqrt{a}$ и $-\sqrt{a}$;
- если $a = 0$, то уравнение $x^2 = a$ имеет единственный корень — число 0;
- если $a < 0$, то уравнение $x^2 = a$ корней не имеет.

Приведём примеры:
корнями уравнения $x^2 = 20$ являются числа $\sqrt{20}$ и $-\sqrt{20}$;
уравнение $x^2 = -4$ корней не имеет.

Решим уравнение
$3x^2 + 0,25 = 1$.
Решение:
$3x^2 = 0,75$,
$x^2 = 0,25$,
$x = \sqrt{0,25}$ или $x = -\sqrt{0,25}$,
$x = 0,5$ или $x = -0,5$.
Ответ: 0,5; −0,5.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Какое число называют квадратным корнем из числа a? Сколько существует квадратных корней из числа a, если $a > 0$? Как они обозначаются? Найдите квадратные корни из a, если $a = 9$; $a = 7$.
- Объясните, почему не существует квадратного корня из отрицательного числа.
- Сформулируйте определение понятия «арифметический квадратный корень», закончив предложение: «Арифметическим квадратным корнем из числа a называется...» Как обозначается арифметический квадратный корень из числа a?
- Найдите квадратные корни из заданных чисел и назовите тот, который является арифметическим:
  а) 36; 100; 12; 80;
  б) 0,09; 0,81; 5,2; 0,1.
- Есть ли среди следующих равенств верные:
  $\sqrt{2,5} = 0,5$; $\sqrt{0,36} = 0,6$; $\sqrt{0,01} = -0,1$?
- Запишите уравнение вида $x^2 = a$, которое имеет два корня; один корень; не имеет корней.

УПРАЖНЕНИЯ

РАБОТАЕМ С ГРАФИКОМ ЗАВИСИМОСТИ $y = x^2$

193 1) На рисунке *2.17* изображена парабола — график зависимости $y = x^2$. Найдите координаты точек, отмеченных на параболе.
Образец. Найдём координаты точки D. Ордината точки D равна 5. Её абсцисса — число положительное, значит, она равна $\sqrt{5}$.
Ответ: $D\ (\sqrt{5};\ 5)$.
2) Найдите координаты точек, симметричных отмеченным точкам относительно оси y.

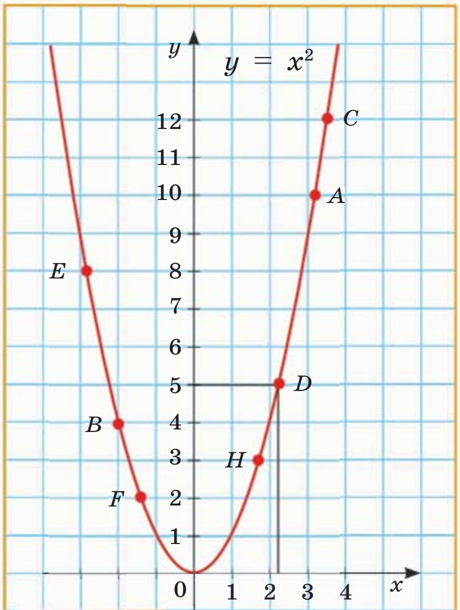


Рис. 2.17

194 Постройте на клетчатой бумаге график зависимости $y = x^2$ для $-3 \le x \le 3$ (единицы по осям 2 клетки). Найдите с помощью графика приближённые значения чисел: $\sqrt{0{,}5}$; $\sqrt{2{,}5}$; $-\sqrt{3}$; $\sqrt{7{,}5}$; $-\sqrt{8}$. Сравните ответы с результатами, полученными с помощью калькулятора, округлив их до десятых. Какие погрешности вы допустили, находя приближённые значения по графику?

195 Какая из трёх точек принадлежит параболе $y = x^2$? Покажите её на схематическом графике:
1) (100; 10); (–10; 100); (10; –100);
2) (0,5; 0,25); (0,5; 2,5); (0,5; –0,25);
3) $(\sqrt{6};\ \sqrt{6})$; $(-\sqrt{6};\ 6)$; $(6;\ \sqrt{6})$;
4) $(\sqrt{20};\ -\sqrt{20})$; $(20;\ \sqrt{20})$; $(-\sqrt{20};\ 20)$.

196 Назовите координаты шести точек параболы $y = x^2$, которые принадлежат:
1) горизонтальной полосе, ограниченной прямыми $y = 10$ и $y = 15$;
2) вертикальной полосе, ограниченной прямыми $x = -3$ и $x = 3$.

ОСВАИВАЕМ ВЫРАЖЕНИЕ $\sqrt{a}$

197 Какие из выражений не имеют смысла: $\sqrt{27}$; $\sqrt{-16}$; $-\sqrt{49}$; $\sqrt{0}$; $\sqrt{0{,}3}$; $\sqrt{\frac{2}{3}}$?

198 Укажите значение тех выражений, которые имеют смысл:
$$\sqrt{100};\ -\sqrt{100};\ \sqrt{-100};\ \sqrt{25\cdot(-4)};\quad \sqrt{-25\cdot(-4)}.$$

199 Имеет ли смысл выражение:
а) $\sqrt{2x-8}$ при $x = 0;\ 4;\ 8;\ 12$; б) $\sqrt{4{,}5-x}$ при $x = -4{,}5;\ -1{,}5;\ 1{,}5;\ 4{,}5;\ 5{,}5$?

200 Существует ли значение переменной c, при котором:
$\sqrt{c} = 0{,}1$; $\sqrt{c} = 1$; $\sqrt{c} = -1$; $\sqrt{c} + 2 = 0$; $\sqrt{c} = 0$; $\sqrt{c} - 4 = 0$?

201 Найдите значение выражения:
а) $(\sqrt{18})^2$;
б) $(-\sqrt{9})^2$;
в) $3\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}$;
г) $\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}$;
д) $(3\sqrt{5})^2$;
е) $(-4\sqrt{3})^2$;
ж) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$;
з) $\left(-\frac{3}{\sqrt{6}}\right)^2$.

202 Найдите допустимые значения переменной в каждом из выражений:
а) $\sqrt{x}$, $\sqrt{-x}$, $-\sqrt{x}$, $\sqrt{3x}$, $\sqrt{-3x}$;
б) $\sqrt{x^2}$, $\sqrt{-x^2}$, $-\sqrt{x^2}$.

203 Вычислите значение выражения:
а) $2,5 + 5(\sqrt{1,3})^2$; в) $(\sqrt{15})^2 - (\sqrt{17})^2$; д) $(2\sqrt{5})^2 - (-5\sqrt{2})^2$;
б) $0,3(\sqrt{40})^2 - 21$; г) $(-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{8})^2$; е) $-0,1(\sqrt{15})^2 + (5\sqrt{0,1})^2$.

204 Упростите: а) $(\sqrt{\sqrt{8}})^2$; б) $(\sqrt{2\sqrt{3}})^2$; в) $(\sqrt{\sqrt{5}})^4$; г) $(\sqrt{3\sqrt{2}})^4$.

205 Найдите значение выражения: а) $\frac{a^2}{4}$ при $a = \frac{\sqrt{2}}{3}$; б) $-\frac{3x^2}{2}$ при $x = 2\sqrt{3}$.

206 Упростите выражение (буквой обозначено некоторое положительное число):
а) $(2a\sqrt{3a})^2$; б) $(5b\sqrt{6b})^2$; в) $2x(\sqrt{8x})^2$; г) $(\sqrt{10c})^2 \cdot 0,1c^2$.

РЕШАЕМ УРАВНЕНИЯ

Решите уравнение (№ 207–209):

207 а) $y^2 = 36$; б) $z^2 = 1$; в) $z^2 = 0,81$; г) $y^2 = 0$; д) $z^2 = \frac{1}{4}$; е) $x^2 = \frac{9}{16}$.

208 а) $x^2 = 3$; б) $x^2 = 7$; в) $x^2 = 11$; г) $x^2 = 12$; д) $x^2 = 8$; е) $x^2 = 72$.

209 а) $x^2 - 25 = 0$; в) $4y^2 = 9$; д) $2x^2 - 4 = 0$; ж) $4x^2 - 1 = 7$;
б) $x^2 + 4 = 0$; г) $25x^2 = 1$; е) $2x^2 + 6 = 0$; з) $3x^2 + 2 = 20$.

210 Решите каждое из уравнений: $x^2 = 2$, $x^2 - 1 = 2$, $x^2 + 2 = 2$, $3 + x^2 = 2$.

211 Даны уравнения: $x^2 = 3$, $x^2 = -144$, $x^2 = \frac{4}{9}$, $x^2 = 144$, $x^2 = 0$, $x^2 = -3$.
Выберите из них те, которые: 1) не имеют корней; 2) имеют два корня; 3) имеют два рациональных корня; 4) имеют два иррациональных корня.

212 Решите уравнение и с помощью калькулятора найдите приближённые десятичные значения корней с одним знаком после запятой:
а) $x^2 = 82$; б) $x^2 - 5,7 = 0$; в) $2x^2 = 150$; г) $4x^2 = 500$; д) $10x^2 - 32 = 21$.

213 Найдите число x, если: а) $\frac{x}{18} = \frac{2}{x}$; б) $\frac{5}{x} = \frac{x}{2}$; в) $\frac{x}{50} = \frac{0,5}{x}$; г) $\frac{0,4}{x} = \frac{x}{10}$.
Подсказка. Примените основное свойство пропорции.

214 Решите уравнение:
а) $(x + 1)^2 = 16$; в) $(x - 5)^2 = 1$; д) $(3x + 6)^2 = 100$;
б) $(x - 1)^2 = 0$; г) $(2x - 1)^2 = 4$; е) $(3 - 2x)^2 = 25$.
Подсказка. а) Уравнение «распадается» на два: $x + 1 = 4$ и $x + 1 = -4$.

215 Пользуясь определением арифметического квадратного корня, решите уравнение и, если корни есть, сделайте проверку:
а) $\sqrt{x + 4} = 1$; в) $6 + \sqrt{x} = 4$; д) $\sqrt{2x + 4} - 2 = 0$; ж) $\sqrt{x^2 - 36} = 8$;
б) $\sqrt{x - 5} = 5$; г) $10 - 2\sqrt{x} = 10$; е) $\sqrt{1 - x} + 3 = 2$; з) $\sqrt{x^2 + 20} = 4$.

2.6 ГРАФИК ЗАВИСИМОСТИ $y = \sqrt{x}$

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Что представляет собой график зависимости $y = \sqrt{x}$.
- О симметрии графиков зависимостей $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$, где $x \geq 0$.

Для вычисления площади квадрата, сторона которого известна, мы используем формулу $S = a^2$, где $a \geq 0$, а для решения обратной задачи — нахождения стороны квадрата по его площади — формулу $a = \sqrt{S}$. Эти формулы — разные способы описания связи между одними и теми же величинами. Чтобы сделать эту связь наглядной, сопоставим два графика — зависимости площади квадрата от его стороны и стороны квадрата от его площади. Для этого запишем формулы $S = a^2$ и $a = \sqrt{S}$ в обозначениях, принятых при работе на координатной плоскости: $y = x^2$ $(x \geq 0)$ и $y = \sqrt{x}$.

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА ЗАВИСИМОСТИ $y = \sqrt{x}$ Вы знаете, что графиком зависимости $y = x^2$, где $x \geq 0$, является часть параболы — её правая ветвь. Выясним теперь, что представляет собой график зависимости $y = \sqrt{x}$. Чтобы построить этот график, составим таблицу соответственных значений x и y, причём в качестве значений x будем брать только неотрицательные числа, так как при $x < 0$ выражение $\sqrt{x}$ смысла не имеет:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	0	1	1,4	1,7	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3	3,2

Отметим в координатной плоскости точки, координаты которых указаны в таблице, и проведём через них от начала координат плавную линию. Построенная линия — график зависимости $y = \sqrt{x}$ (*рис. 2.18*). Этот график — тоже одна из ветвей параболы, но только расположенной горизонтально.

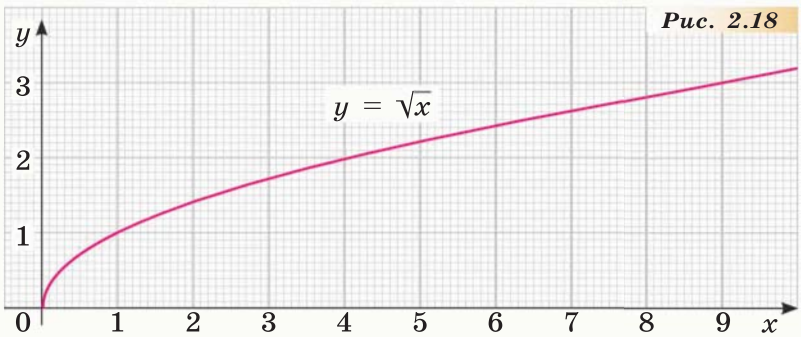


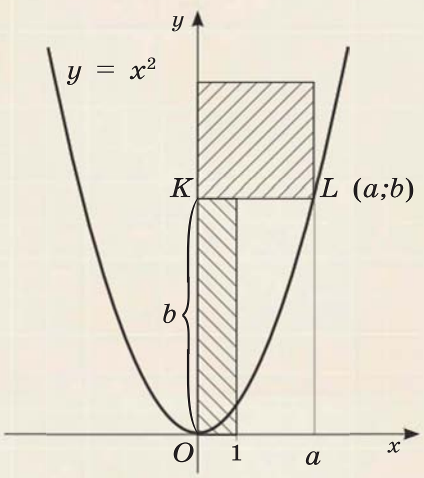
Рис. 2.18

ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ГРАФИКОВ ЗАВИСИМОСТЕЙ $y = x^2$ $(x \geq 0)$ И $y = \sqrt{x}$ На рисунке *2.19* изображены оба этих графика, построенные в одной системе координат. Вы, наверное, уже поняли, что графики двух рассматриваемых зависимостей связаны между собой. Это утверждает следующая *теорема*:

> **!** графики зависимостей $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$, где $x \geq 0$, симметричны относительно прямой $y = x$.

Слово «парабола» в качестве названия кривой ввёл древнегреческий математик Аполлоний Пергский (рубеж III и II вв. до н. э.). Означает оно «приложение». Почему Аполлоний дал кривой такое название?

Отметим на параболе, заданной равенством $y = x^2$, произвольную точку L (см. рис.). Пусть её абсцисса равна a, а ордината равна b, тогда $a^2 = b$. На языке площадей это означает: площадь квадрата, построенного на отрезке KL, перпендикулярном оси y, равна площади прямоугольника, одна сторона которого — отрезок OK, а другая — единичный отрезок. Парабола как бы *преобразует* квадрат в прямоугольник с единичным основанием. Такую операцию греки назвали *приложением квадрата к данному основанию*. Отсюда и это название — «парабола».



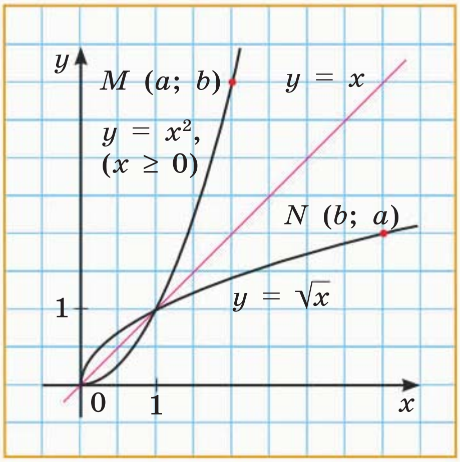


Рис. 2.19

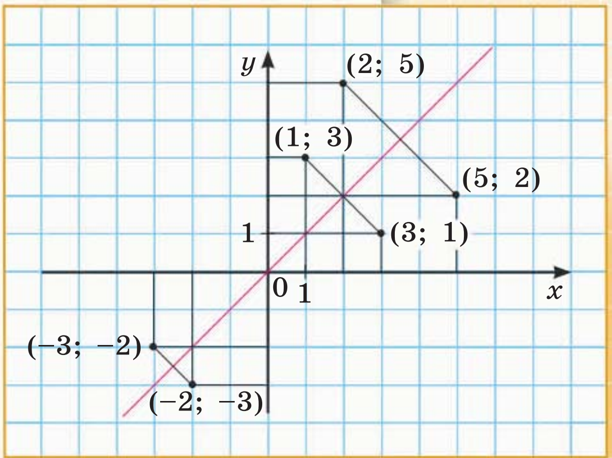


Рис. 2.20

Доказательство. Оно основано на том, что точки, координаты которых различаются только порядком, такие, как (−2; −3) и (−3; −2), (3; 1) и (1; 3), (5; 2) и (2; 5), симметричны относительно прямой $y = x$ (***рис. 2.20***).

Пусть точка M $(a; b)$ принадлежит графику зависимости $y = x^2$, где $x \geq 0$ (***рис. 2.19***). Это означает, что верно равенство $b = a^2$. По условию a — число неотрицательное. Так как $b = a^2$ и $a \geq 0$, то $a = \sqrt{b}$. Но тогда координаты точки N $(b; a)$, симметричной точке M $(a; b)$ относительно прямой $y = x$, удовлетворяют равенству $y = \sqrt{x}$, т. е. эта точка принадлежит графику зависимости $y = \sqrt{x}$ (***рис. 2.19***).

Таким образом, каждой точке параболы $y = x^2$, где $x \geq 0$, соответствует симметричная ей относительно прямой $y = x$ точка графика зависимости $y = \sqrt{x}$. Верно и обратное: каждой точке графика зависимости $y = \sqrt{x}$ соответствует симметричная ей относительно прямой $y = x$ точка графика зависимости $y = x^2$, где $x \geq 0$. Следовательно, эти графики симметричны относительно прямой $y = x$. Иными словами, график зависимости $y = \sqrt{x}$ расположен относительно оси x точно так же, как график зависимости $y = x^2$, где $x \geq 0$, относительно оси y.

Свойства графика зависимости $y = \sqrt{x}$:

- График целиком расположен в первой координатной четверти, причём начало координат принадлежит графику.
- Ось y является касательной к графику в точке O (0; 0).
- При движении по оси x слева направо график поднимается вверх. Этот «подъём» хотя и замедляется, но он неограничен, т. е. любая горизонтальная прямая, расположенная выше оси x, пересекает график.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Относительно какой прямой симметричны графики зависимостей $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$, где $x \geq 0$? Для точки (2; 4), принадлежащей параболе $y = x^2$, назовите симметричную ей точку, принадлежащую графику зависимости $y = \sqrt{x}$. Для точки $(3; \sqrt{3})$, принадлежащей графику $y = \sqrt{x}$, назовите симметричную ей точку, принадлежащую параболе $y = x^2$.
- а) Постройте график зависимости $y = x^2$ для $x \geq 0$. В этой же системе координат постройте график зависимости $y = \sqrt{x}$, используя симметрию графиков относительно прямой $y = x$.

  б) Какие точки у этих графиков общие? Где в координатной плоскости они расположены?

  в) При каких значениях x график зависимости $y = \sqrt{x}$ расположен выше графика зависимости $y = x^2$ $(x \geq 0)$, а при каких — ниже?
- а) Опишите свойства графика зависимости $y = \sqrt{x}$.

  б) Пересекает ли этот график прямая $y = 10$; $y = -10$?

УПРАЖНЕНИЯ

РАБОТАЕМ С ГРАФИКОМ ЗАВИСИМОСТИ $y = \sqrt{x}$

216 Пользуясь графиком зависимости $y = \sqrt{x}$ (*рис 2.18*), найдите:
а) значения выражения $\sqrt{x}$ при x, равном 0,5; 2,3; 4,5; 6,2; 7,8; 8,5;
б) значение x, при котором $\sqrt{x} = 0{,}5;\ 1{,}4;\ 1{,}8;\ 2{,}2;\ 2{,}5$.

217 Определите, пересекаются ли график зависимости $y = \sqrt{x}$ и заданная прямая. Если да, то укажите координаты точки пересечения:
а) $x = 16$, $x = 10$, $x = -4$, $x = a$ $(a > 0)$, $x = a$ $(a < 0)$;
б) $y = 10$, $y = \sqrt{2}$, $y = -5$, $y = c$ $(c > 0)$, $y = c$ $(c < 0)$.

218 Принадлежит ли графику зависимости $y = \sqrt{x}$ точка:
а) (225; 15);
б) (144; −12);
в) (−16; 4);
г) (0,01; 0,1);
д) $(27;\ \sqrt{27})$;
е) $(\sqrt{15};\ 15)$?

219 Даны точки: A (121; 11), B (64; 10), C $(24;\ \sqrt{24})$, D (38; 6), E (50; 7), F (0,04; 0,2), K (2; 1,5), L (3; 1,7). Разбейте их на три группы: к первой отнесите точки, принадлежащие графику зависимости $y = \sqrt{x}$; ко второй — точки, расположенные выше этого графика; к третьей — точки, расположенные ниже его.

220 Известны координаты трёх точек: A (12; 4), B (8; 2) и C (17; 5). Их попарно соединяют отрезками. Пересекают ли график зависимости $y = \sqrt{x}$ какие-нибудь из этих отрезков?

221 1) Постройте график зависимости $y = -\sqrt{x}$, заполнив предварительно следующую таблицу:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$-\sqrt{x}$											

2) При каких значениях x имеет смысл выражение $\sqrt{-x}$? Постройте график зависимости $y = \sqrt{-x}$.

Совет. При выполнении заданий 1 и 2 используйте данные таблицы на с. 58.

СРАВНИВАЕМ ЧИСЛА С ОПОРОЙ НА ГРАФИК

222 Какое примерно приращение получает переменная y, где $y = \sqrt{x}$, при изменении x: 1) от 0 до 10; 2) от 10 до 20; 3) от 50 до 60; 4) от 100 до 110? (Для вычислений используйте калькулятор; ответы округляйте до десятых.) Результаты оформите в виде следующей таблицы.

Пункт	x_1	x_2	y_1	y_2	$y_2 - y_1$
1)	0	10	0	3,2	3,2 − 0 = 3,2
2)					
3)					
4)					

Сделайте вывод о характере роста переменной y.

223 Сравните числа (рассуждайте с опорой на график):
а) $\sqrt{200}$ и $\sqrt{180}$; в) $\sqrt{0{,}02}$ и $\sqrt{0{,}012}$; д) $\sqrt{120}$ и 12;
б) $\sqrt{58}$ и $\sqrt{85}$; г) $\sqrt{0{,}3}$ и $\sqrt{0{,}33}$; е) 0,8 и $\sqrt{0{,}6}$.

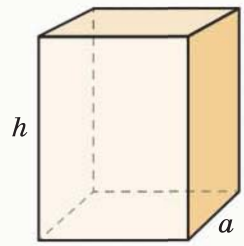
224 Расположите в порядке возрастания числа:
а) $\sqrt{37}$, $\sqrt{70}$ и $\sqrt{47}$; в) $\sqrt{18}$, $\sqrt{12}$ и 4; д) 0,3, $\sqrt{\frac{1}{2}}$ и $\sqrt{\frac{1}{3}}$;
б) $\sqrt{19{,}8}$, $\sqrt{6{,}9}$ и $\sqrt{15{,}1}$; г) $\sqrt{0{,}9}$, 0,5 и $\sqrt{0{,}5}$; е) $\sqrt{0{,}2}$, $\sqrt{1{,}2}$ и 1.

Выполняйте упражнения с опорой на рисунок *2.19* (№ 225–226):

225 а) 1) Сравните числа: 0,5 и $0{,}5^2$; 0,9 и $0{,}9^2$; 10 и 10^2; 40^2 и 40.
2) Какое из чисел больше: a или a^2, если известно, что $0 < a < 1$? $a > 1$?
б) 1) Сравните числа: 0,5 и $\sqrt{0{,}5}$; $\sqrt{0{,}9}$ и 0,9; 10 и $\sqrt{10}$; $\sqrt{40}$ и 40.
2) Какое из чисел больше: a или $\sqrt{a}$, если известно, что $0 < a < 1$? $a > 1$?

226 Расположите в порядке возрастания числа:
а) 0,6, $\sqrt{0{,}6}$ и $0{,}6^2$; б) 12,5, $\sqrt{12{,}5}$ и $12{,}5^2$.

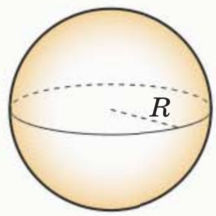
РАБОТАЕМ С ФОРМУЛАМИ



$V = a^2h$

Рис. 2.21

227 Высота прямоугольного параллелепипеда равна h, его основание — квадрат со стороной a (*рис. 2.21*). Из формулы объёма параллелепипеда выразите сторону основания a. Найдите a, если известно, что:
а) $V = 5$ см³, $h = 0{,}8$ см; б) $V = 105$ см³, $h = 15$ см.
Дайте сначала точный ответ, а затем найдите десятичное приближение a с одним знаком после запятой.



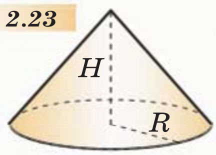
$S = 4\pi R^2$

Рис. 2.22

228 На рисунке *2.22* изображён шар радиуса R и приведена формула для вычисления площади S его поверхности. Задайте формулой зависимость R от S.

229 Выразите из формулы объёма конуса его высоту и радиус основания (*рис. 2.23*).

Рис. 2.23



$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$

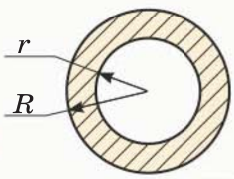


Рис. 2.24

230 Составьте формулу для вычисления площади S кольца (*рис. 2.24*). Выразите из этой формулы сначала радиус большого круга, а затем радиус малого круга.

231 ### ЗАДАЧА-ИССЛЕДОВАНИЕ

1) В каких границах заключено число $\sqrt{n}$, если:
а) $1 < n < 100$; б) $100 < n < 10\,000$; в) $10\,000 < n < 1\,000\,000$?
Запишите ответ в виде двойного неравенства.
2) Известно, что число n натуральное и является «точным квадратом», т. е. число $\sqrt{n}$ тоже натуральное. Сколько цифр содержится в записи числа $\sqrt{n}$, если число n: двузначное; трёхзначное; четырёхзначное; пятизначное; шестизначное?
Приведите примеры для каждого случая.

2.7 СВОЙСТВА КВАДРАТНЫХ КОРНЕЙ

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Свойства, которыми обладает квадратный корень из произведения, частного и степени.
- Правила умножения и деления квадратных корней.
- Правило извлечения квадратного корня из степени с натуральным чётным показателем.

Рассмотрим свойства арифметических квадратных корней, при этом для краткости вместо «арифметический квадратный корень» будем говорить «квадратный корень» или просто «корень». Вы знаете, что извлечение квадратного корня является действием, обратным возведению в квадрат, поэтому свойства этих действий связаны между собой.

КОРЕНЬ ИЗ ПРОИЗВЕДЕНИЯ И ЧАСТНОГО Сравним значения выражений $\sqrt{25 \cdot 4}$ и $\sqrt{25} \cdot \sqrt{4}$:

$$\sqrt{25 \cdot 4} = \sqrt{100} = 10, \quad \sqrt{25} \cdot \sqrt{4} = 5 \cdot 2 = 10.$$

Таким образом, $\sqrt{25 \cdot 4} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{4}$. Этот результат не случаен; аналогичным свойством обладает корень из произведения любых двух неотрицательных чисел.

> **!** Если $a \geq 0$ и $b \geq 0$, то $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

Доказательство. Чтобы доказать равенство $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, покажем, что выполняются оба условия, накладываемые определением арифметического квадратного корня:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geq 0 \text{ и } (\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = ab.$$

Первое очевидно: так как $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ — числа неотрицательные, то и произведение $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ неотрицательно.

Чтобы убедиться в выполнении второго условия, возведём произведение $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ в квадрат:

$$(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = ab.$$

Доказанное свойство корня распространяется на произведение любого числа множителей. Получаем правило: *чтобы извлечь корень из произведения неотрицательных чисел, можно извлечь корень из каждого множителя отдельно и результаты перемножить.*

Приведём примеры.

Пример 1. Найдём значение выражения $\sqrt{81 \cdot 25 \cdot 64}$.

С помощью правила извлечения корня из произведения мы сможем сделать это практически устно:

$$\sqrt{81 \cdot 25 \cdot 64} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{25} \cdot \sqrt{64} = 9 \cdot 5 \cdot 8 = (9 \cdot 4) \cdot (5 \cdot 2) = 360.$$

Пример 2. Вычислим значение выражения $\sqrt{12 \cdot 75}$.

В данном случае применять непосредственно свойство корня из произведения смысла нет. Однако подкоренное выражение можно представить в виде произведения таких чисел, которые являются «точными квадратами», и уже затем воспользоваться правилом:

$$\sqrt{12 \cdot 75} = \sqrt{(4 \cdot 3) \cdot (25 \cdot 3)} = \sqrt{4 \cdot 9 \cdot 25} = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30.$$

Чтобы доказать равенство вида $\sqrt{x} = y$, нужно в соответствии с определением арифметического квадратного корня проверить выполнение двух условий:

1) $y \geq 0$; 2) $y^2 = x$.

Пример. Докажем, что верно равенство $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$:

1) $2\sqrt{2}$ — число положительное;

2) $(2\sqrt{2})^2 = 2^2 \cdot (\sqrt{2})^2 = 8$.

Значит, по определению $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Используя равенство

$$\sqrt{62} \approx 7{,}9,$$

найдём значения выражений

$$\sqrt{620\,000} \text{ и } \sqrt{0{,}62}.$$

$\sqrt{620000} = \sqrt{62 \cdot 10\,000} = \sqrt{62} \cdot \sqrt{10\,000} \approx 7{,}9 \cdot 100 = 790;$

$\sqrt{0{,}62} = \sqrt{\dfrac{62}{100}} = \dfrac{\sqrt{62}}{\sqrt{100}} \approx \dfrac{7{,}9}{10} = 0{,}79.$

Рассмотрим теперь свойство частного:

если $a \geq 0$ и $b > 0$, то $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Чтобы извлечь корень из частного от деления неотрицательного числа на положительное, можно извлечь корень отдельно из делимого и делителя и первый результат поделить на второй.

Пример 3. Найдём значение выражения $\sqrt{\frac{49}{121}}$:

$$\sqrt{\frac{49}{121}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{121}} = \frac{7}{11}.$$

Если равенства $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ и $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ прочитать справа налево, то мы получим *правила умножения и деления корней*:

$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{ab}$, где $a \geq 0$ и $b \geq 0$;

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$, где $a \geq 0$ и $b > 0$.

Пример 4. Упростим произведение $\sqrt{18}\cdot\sqrt{2}$ и частное $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$:

$$\sqrt{18}\cdot\sqrt{2} = \sqrt{18\cdot 2} = \sqrt{36} = 6; \quad \frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{75}{3}} = \sqrt{25} = 5.$$

КОРЕНЬ ИЗ СТЕПЕНИ Упростим выражение $\sqrt{2^8}$. Для этого представим степень 2^8 в виде $(2^4)^2$:

$$\sqrt{2^8} = \sqrt{(2^4)^2} = 2^4, \text{ т. е. } \sqrt{2^8} = 2^{\frac{8}{2}}.$$

Этот пример подсказывает следующее свойство корня:

если $a \geq 0$ и n — чётное натуральное число, то $\sqrt{a^n} = a^{\frac{n}{2}}$.

Доказательство.

1) Основание степени a — число неотрицательное, поэтому при возведении его в степень мы опять получаем число неотрицательное, т. е. $a^{\frac{n}{2}} \geq 0$.

2) $(a^{\frac{n}{2}})^2 = a^{\frac{n}{2}\cdot 2} = a^n$.

Значит, в соответствии с определением арифметического квадратного корня верно равенство $\sqrt{a^n} = a^{\frac{n}{2}}$.

Чтобы извлечь корень из степени, основание которой — число неотрицательное, а показатель — чётное натуральное число, можно показатель степени разделить на 2, а основание оставить прежним.

Пример 5. Найдём значение выражения $\sqrt{5625}$.

Разложим число 5625 на простые множители, получим: $5625 = 3^2\cdot 5^4$. Тогда

$$\sqrt{5625} = \sqrt{3^2\cdot 5^4} = \sqrt{3^2}\cdot\sqrt{5^4} = 3\cdot 5^2 = 3\cdot 25 = 75.$$

Мы воспользовались правилами извлечения корня из произведения и извлечения корня из степени.

Свойства	
степени	квадратного корня
$(ab)^2 = a^2b^2$	$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ $(a \geq 0,\ b \geq 0)$
$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$ $(b \neq 0)$	$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $(a \geq 0,\ b > 0)$
$(a^n)^2 = a^{2n}$	$\sqrt{a^n} = a^{\frac{n}{2}}$ $(n \in N,\ n = 2k)$

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

1) Запишите в буквенном виде и докажите свойство корня из произведения.

2) Найдите значение выражения $\sqrt{0{,}49\cdot 0{,}16}$.

1) Запишите в буквенном виде и докажите свойство корня из частного.

2) Найдите значение выражения $\sqrt{\frac{0{,}25}{36}}$.

Запишите в буквенном виде правила умножения и деления корней и проиллюстрируйте их на примере выражений $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}$ и $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{27}}$.

Сформулируйте правило извлечения корня из степени с натуральным чётным показателем и проиллюстрируйте его на примере выражения $\sqrt{3^6}$.

1) Имеет ли смысл выражение $\sqrt{ab}$ при $a < 0$ и $b < 0$? при $a < 0$ и $b > 0$? при $a = 0$ и $b < 0$? Если имеет, то приведите пример.

2) Докажите, что если $a < 0$ и $b < 0$, то $\sqrt{ab} = \sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b}$; проиллюстрируйте это равенство числовым примером.

УПРАЖНЕНИЯ

ИЗВЛЕКАЕМ КОРЕНЬ ИЗ ПРОИЗВЕДЕНИЯ И ЧАСТНОГО

232 Вычислите:
а) $\sqrt{25\cdot 121}$; в) $\sqrt{49\cdot 400}$; д) $\sqrt{1{,}44\cdot 36}$; ж) $\sqrt{0{,}09\cdot 196}$;
б) $\sqrt{16\cdot 900}$; г) $\sqrt{64\cdot 144}$; е) $\sqrt{81\cdot 0{,}49}$; з) $\sqrt{1{,}69\cdot 0{,}25}$.

233 Вычислите:
а) $\sqrt{\frac{25}{81}}$; б) $\sqrt{\frac{121}{36}}$; в) $\sqrt{2\frac{14}{25}}$; г) $\sqrt{5\frac{1}{16}}$; д) $\sqrt{\frac{0{,}49}{4}}$; е) $\sqrt{\frac{1{,}44}{25}}$.

234 Вычислите:
а) $\sqrt{\frac{1}{16}\cdot\frac{9}{25}}$; б) $\sqrt{\frac{64}{9}\cdot\frac{4}{49}}$; в) $\sqrt{\frac{0{,}25\cdot 49}{9}}$; г) $\sqrt{\frac{169\cdot 81}{400}}$; д) $\sqrt{\frac{0{,}09\cdot 0{,}16}{1{,}44}}$.

235 Вычислите:
а) $\sqrt{4\cdot 9\cdot 0{,}36}$; в) $\sqrt{2{,}25\cdot 0{,}04\cdot 900}$; д) $\sqrt{2\frac{1}{4}\cdot 1\frac{9}{16}\cdot\frac{1}{100}}$;
б) $\sqrt{0{,}64\cdot 0{,}04\cdot 1{,}21}$; г) $\sqrt{1{,}96\cdot 0{,}01\cdot 400}$; е) $\sqrt{1\frac{7}{9}\cdot 1\frac{11}{25}\cdot\frac{49}{64}}$.

236 Вычислите:
а) $\sqrt{45\cdot 20}$; в) $\sqrt{75\cdot 48}$; д) $\sqrt{4{,}9\cdot 360}$; ж) $\sqrt{250\cdot 1{,}6}$;
б) $\sqrt{10\cdot 90}$; г) $\sqrt{45\cdot 80}$; е) $\sqrt{160\cdot 6{,}4}$; з) $\sqrt{12{,}1\cdot 40}$.

237 Найдите значение выражения:
а) $\sqrt{8^2+6^2}$; в) $\sqrt{17^2-8^2}$; д) $\sqrt{122^2-22^2}$;
б) $\sqrt{13^2-12^2}$; г) $\sqrt{12^2+5^2}$; е) $\sqrt{65^2-16^2}$.

238 Зная, что $\sqrt{45}\approx 6{,}708$, найдите приближённые значения выражений:
$\sqrt{4500}$, $\sqrt{450\,000}$, $\sqrt{0{,}45}$, $\sqrt{0{,}0045}$.

239 Найдите по таблице квадратов значение степени 34^2. Используя полученный результат, вычислите: $\sqrt{115\,600}$, $\sqrt{11\,560\,000}$, $\sqrt{11{,}56}$, $\sqrt{0{,}1156}$, $\sqrt{0{,}001156}$.

240 Найдите значение корня:
а) $\sqrt{0{,}87\cdot 49+0{,}82\cdot 49}$; в) $\sqrt{0{,}09^2-0{,}09\cdot 0{,}05}$;
б) $\sqrt{0{,}36\cdot 1{,}21-0{,}4\cdot 0{,}36}$; г) $\sqrt{6{,}25\cdot 6+6{,}25^2}$.

241 Найдите значение выражения:
а) $\sqrt{45\cdot 10\cdot 72}$; б) $\sqrt{52\cdot 39\cdot 75}$; в) $\sqrt{30\cdot 66\cdot 220}$.

242 Выясните, при каких значениях переменной имеют смысл выражения, и представьте каждое из них в виде произведения корней или в виде частного корней:
а) $\sqrt{7a}$, $\sqrt{\frac{c}{3}}$, $\sqrt{\frac{10}{x}}$; б) $\sqrt{-2y}$, $\sqrt{\frac{-a}{6}}$, $\sqrt{-\frac{5}{c}}$.

УМНОЖАЕМ И ДЕЛИМ КОРНИ

243 Вычислите значение произведения:
а) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$; в) $\sqrt{28}\cdot\sqrt{7}$; д) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{45}$; ж) $\sqrt{7}\cdot\sqrt{63}$;
б) $\sqrt{27}\cdot\sqrt{3}$; г) $\sqrt{32}\cdot\sqrt{2}$; е) $\sqrt{50}\cdot\sqrt{2}$; з) $\sqrt{44}\cdot\sqrt{11}$.

244 Вычислите значение частного:
а) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$; в) $\frac{\sqrt{108}}{\sqrt{3}}$; г) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{150}}$; д) $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{1000}}$; е) $\frac{\sqrt{7,5}}{\sqrt{2,7}}$; ж) $\frac{\sqrt{0,6}}{\sqrt{2,4}}$.

245 1) Вычислить с помощью калькулятора приближённое значение произведения $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$ можно двумя способами: найти, используя калькулятор, значения $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ и результаты перемножить или заменить произведение $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$ выражением $\sqrt{6}$, а затем уже воспользоваться калькулятором. Какой из этих способов удобнее? Почему?
2) Найдите с помощью калькулятора приближённое значение выражения (округлите результат до тысячных):
а) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}$; б) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{7}$; в) $\frac{\sqrt{303}}{\sqrt{202}}$; г) $\frac{\sqrt{22}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}$.

246 Сравните значения выражений:
а) $\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}$ и $\sqrt{7}\cdot\sqrt{5}$; б) $\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{6}}$ и $\sqrt{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{\frac{1}{4}}$; в) $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{12}}$ и $\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{5}}$; г) $\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}$ и $\sqrt{\frac{3}{4}}\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}$.

247 Найдите значение выражения:
а) $0,2ab$ при $a = \sqrt{15}$, $b = \sqrt{135}$; б) $-\frac{1}{3}xy$ при $x = \sqrt{6}$, $y = \sqrt{24}$.

248 Вычислите:
а) $\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}}{12}$; б) $\frac{\sqrt{15}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{10}}{3}$; в) $\frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{8}}{\sqrt{10}}$; г) $\sqrt{1\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{2,4}$.

249 Упростите выражение:
а) $4\sqrt{5}\cdot\sqrt{45}\cdot\sqrt{0,25}$;
б) $3\sqrt{27}\cdot\sqrt{0,04}\cdot\sqrt{75}$;
в) $2\sqrt{15}\cdot3\sqrt{2}\cdot4\sqrt{30}$;
г) $5\sqrt{18}\cdot4\sqrt{40}\cdot2\sqrt{5}$.

ИЗВЛЕКАЕМ КОРЕНЬ ИЗ СТЕПЕНИ

250 Найдите значение корня:
а) $\sqrt{2^6}$; б) $\sqrt{3^4}$; в) $\sqrt{5^6}$; г) $\sqrt{10^8}$; д) $\sqrt{(-2)^4}$; е) $\sqrt{(-3)^6}$.

Вычислите (№ 251—252):

251 а) $\sqrt{24^2\cdot3^2}$; б) $\sqrt{13^2\cdot2^6}$; в) $\sqrt{2^4\cdot3^2\cdot5^6}$; г) $\sqrt{3^4\cdot5^4\cdot2^8}$; д) $\sqrt{\frac{3^2\cdot2^8}{5^2}}$; е) $\sqrt{\frac{3^4}{2^6\cdot5^6}}$.

252 а) $\sqrt{125\cdot5}$; б) $\sqrt{8\cdot98}$; в) $\sqrt{48\cdot27}$; г) $\sqrt{810\cdot10}$; д) $\sqrt{50\cdot72}$; е) $\sqrt{30\cdot480}$.
Образец. $\sqrt{135\cdot15} = \sqrt{5\cdot27\cdot5\cdot3} = \sqrt{5^2\cdot3^4} = \sqrt{5^2}\cdot\sqrt{3^4} = 5\cdot3^2 = 45$.

253 Вычислите значение корня, разложив подкоренное число на простые множители: а) $\sqrt{28\,224}$; б) $\sqrt{50\,625}$; в) $\sqrt{254\,016}$.

254

ЗАДАЧА-ИССЛЕДОВАНИЕ

1) Выражение $\sqrt{3^{-6}}$ можно преобразовать так: $\sqrt{3^{-6}} = \sqrt{(3^{-3})^2} = 3^{-3}$.
Преобразуйте по этому образцу выражения: $\sqrt{2^{-6}}$; $\sqrt{10^{-4}}$; $\sqrt{3^{-8}}$.
2) Сформулируйте правило извлечения квадратного корня из степени, показатель которой — чётное отрицательное число, запишите его в буквенном виде и докажите.
3) Используя правило, вычислите: $\sqrt{2^{-10}}$; $\sqrt{5^{-6}}$; $\sqrt{10^{-2}}$.

2.8 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ КВАДРАТНЫЕ КОРНИ

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- На основании какого свойства выполняются преобразования, называемые вынесением множителя из-под знака корня и внесением множителя под знак корня.
- Что для преобразования выражений, содержащих корни, применимы правила действий с многочленами.
- В чём состоит преобразование, которое называют освобождением от иррациональности в знаменателе дроби.
- Как преобразовывают выражения вида $\sqrt{x^2}$.

Свойства квадратных корней дают возможность упрощать выражения, содержащие радикалы, и представлять их в виде, удобном для решения поставленной задачи. Рассмотрим часто используемые виды преобразований.

ВЫНЕСЕНИЕ МНОЖИТЕЛЯ ИЗ-ПОД ЗНАКА КОРНЯ И ВНЕСЕНИЕ МНОЖИТЕЛЯ ПОД ЗНАК КОРНЯ Преобразуем выражение $\sqrt{48}$ с помощью свойства корня из произведения:

$$\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3}.$$

Мы представили $\sqrt{48}$ в виде произведения $4\sqrt{3}$. Такое преобразование называют *вынесением множителя из-под знака корня*.

Нетрудно выполнить и обратное преобразование — представить произведение $4\sqrt{3}$ в виде корня. Для этого воспользуемся правилом умножения корней:

$$4\sqrt{3} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{48}.$$

Такое преобразование называют *внесением множителя под знак корня*.

Пример 1. Сравним значения выражений $2\sqrt{5}$ и $\sqrt{18}$.

Представим произведение $2\sqrt{5}$ в виде корня. Для этого внесём множитель 2 под знак корня. Получим

$$2\sqrt{5} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{20}.$$

Задача свелась к сравнению квадратных корней. Так как $\sqrt{20} > \sqrt{18}$, то $2\sqrt{5} > \sqrt{18}$.

Обратите внимание: под знак корня можно вносить только положительный множитель. А если множитель перед корнем отрицательный, то после преобразования минус так и должен там остаться. Например:

$$-2\sqrt{5} = -\sqrt{2^2} \cdot \sqrt{5} = -\sqrt{4 \cdot 5} = -\sqrt{20}.$$

Задача. Какое из чисел больше: $\frac{2}{3}\sqrt{72}$ или $7\sqrt{\frac{2}{3}}$?

Решение:

1) $\frac{2}{3}\sqrt{72} = \sqrt{\frac{4}{9} \cdot 72} = \sqrt{32}$,

$7\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{49 \cdot \frac{2}{3}} = \sqrt{32\frac{2}{3}}$;

2) $\sqrt{32\frac{2}{3}} > \sqrt{32}$, значит,

$7\sqrt{\frac{2}{3}} > \frac{2}{3}\sqrt{72}$.

1) $\sqrt{10a^2} = \begin{cases} a\sqrt{10} \text{ при } a \ge 0, \\ -a\sqrt{10} \text{ при } a < 0; \end{cases}$

2) $a\sqrt{10} = \begin{cases} \sqrt{10a^2} \text{ при } a \ge 0, \\ -\sqrt{10a^2} \text{ при } a < 0. \end{cases}$

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ С РАДИКАЛАМИ ПО ПРАВИЛАМ ДЕЙСТВИЙ С МНОГОЧЛЕНАМИ

Пример 2. Упростим сумму $\sqrt{18} - \sqrt{32}$.

В каждом слагаемом можно вынести множитель из-под знака корня:

$$\sqrt{18} - \sqrt{32} = \sqrt{9 \cdot 2} - \sqrt{16 \cdot 2} = 3\sqrt{2} - 4\sqrt{2}.$$

Теперь слагаемые содержат корни с одинаковыми подкоренными выражениями. Такие выражения, как $3\sqrt{2}$, $-4\sqrt{2}$, называют *подобными радикалами*; к ним применимо правило приведения подобных слагаемых.

Сложим коэффициенты подобных радикалов и умножим сумму на общий множитель $\sqrt{2}$.

$$3\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = (3 - 4)\sqrt{2} = -1 \cdot \sqrt{2} = -\sqrt{2}.$$

Пример 3. Упростим выражение $(\sqrt{2} + 2\sqrt{3})(2\sqrt{3} - \sqrt{2})$.

Нам дано произведение суммы двух выражений и их разности, поэтому для его преобразования можно применить формулу $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$:

$$(\sqrt{2} + 2\sqrt{3})(2\sqrt{3} - \sqrt{2}) = (2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2 = 4 \cdot 3 - 2 = 10.$$

ОСВОБОЖДЕНИЕ ОТ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТИ В ЗНАМЕНАТЕЛЕ ДРОБИ

Пример 4. Преобразуем дробь $\frac{3\sqrt{7}}{4\sqrt{2}}$ в равную ей дробь, но не содержащую корня в знаменателе. Для этого умножим числитель и знаменатель дроби на $\sqrt{2}$. Получим

$$\frac{3\sqrt{7}}{4\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{7} \cdot \sqrt{2}}{4(\sqrt{2})^2} = \frac{3\sqrt{14}}{8}.$$

Такое преобразование называют *освобождением от иррациональности в знаменателе дроби*. В результате мы получили более простое выражение; оно удобнее для вычисления приближённого значения дроби.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЯ $\sqrt{x^2}$ При преобразовании выражения $\sqrt{x^2}$ необходимо учитывать знак числа x. Чтобы убедиться в этом, найдём значение этого выражения при положительном и при отрицательном значении x, например, при $x = 8$ и при $x = -8$.

Пусть $x = 8$, тогда $\sqrt{x^2} = \sqrt{8^2} = 8$. Значит, если x — положительное число, то $\sqrt{x^2} = x$. Пусть $x = -8$, тогда $\sqrt{x^2} = \sqrt{(-8)^2} = \sqrt{8^2} = 8$. Значит, если x — отрицательное число, то $\sqrt{x^2} = -x$. Очевидно, что в каждом из рассмотренных случаев значение выражения $\sqrt{x^2}$ равно модулю числа x: $\sqrt{8^2} = |8|$; $\sqrt{(-8)^2} = |-8|$.

Вообще

> **!** при любом значении x верно равенство
> $$\sqrt{x^2} = |x|.$$

Доказательство. Покажем, что выполняются оба условия определения арифметического квадратного корня.

1) При любом x значение выражения $|x|$ есть число неотрицательное — это следует из определения модуля числа.

2) При любом x выполняется равенство $|x|^2 = x^2$. В самом деле,

если $x \geq 0$, то $|x| = x$ и $|x|^2 = x^2$;

если $x < 0$, то $|x| = -x$ и $|x|^2 = (-x)^2 = x^2$.

Значит, согласно определению арифметического квадратного корня, $\sqrt{x^2} = |x|$.

Задача. Каким числом — рациональным или иррациональным — является значение выражения

$$\frac{1}{\sqrt{10} - 2} - \frac{1}{\sqrt{10} + 2}?$$

Решение:

$$\frac{1}{\sqrt{10} - 2} - \frac{1}{\sqrt{10} + 2} =$$

$$= \frac{\sqrt{10} + 2}{(\sqrt{10})^2 - 2^2} - \frac{\sqrt{10} - 2}{(\sqrt{10})^2 - 2^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{10} + 2 - \sqrt{10} + 2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Ответ: рациональным.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- На примере выражений $\sqrt{18}$ и $5\sqrt{2}$ объясните, как выносят множитель из-под знака корня и как вносят множитель под знак корня. На каком свойстве квадратного корня основаны эти преобразования?
- 1) Укажите в данном перечне радикалы, которые являются подобными:
  а) $2\sqrt{3}$, $3\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$;
  б) $5\sqrt{a}$, $6\sqrt{c}$, $-5\sqrt{a}$, $\sqrt{c}$.
  2) Объясните, как можно упростить сумму $4\sqrt{3} + \sqrt{7} - 5\sqrt{3} + 7\sqrt{2}$.
- Какую формулу сокращённого умножения можно использовать для преобразования выражения:
  а) $(\sqrt{6} - \sqrt{2})(\sqrt{6} + \sqrt{2})$; б) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$?
  Выполните эти преобразования.
- Преобразуйте дробь $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$ в равную дробь, не содержащую радикала в знаменателе. Как называется такое преобразование?
- Упростите выражение:
  а) $\sqrt{a^2}$, где $a \geq 0$; б) $\sqrt{c^2}$, где $c < 0$.

УПРАЖНЕНИЯ

ВЫНОСИМ МНОЖИТЕЛЬ ИЗ-ПОД ЗНАКА КОРНЯ И ВЫПОЛНЯЕМ ОБРАТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

255 Вынесите множитель из-под знака корня:
а) $\sqrt{12}$; б) $\sqrt{18}$; в) $\sqrt{50}$; г) $\sqrt{20}$; д) $\sqrt{45}$; е) $\sqrt{27}$; ж) $\sqrt{80}$; з) $\sqrt{98}$; и) $\sqrt{300}$; к) $\sqrt{450}$.

256 Вынесите множители из-под знака корня и упростите получившееся выражение:
а) $2\sqrt{8}$; б) $-5\sqrt{32}$; в) $0{,}5\sqrt{24}$; г) $0{,}4\sqrt{75}$; д) $\frac{1}{3}\sqrt{72}$; е) $\frac{2}{3}\sqrt{54}$; ж) $0{,}1\sqrt{125}$; з) $0{,}25\sqrt{96}$.

257 Сократите дробь:
а) $\frac{\sqrt{108}}{12}$; б) $\frac{2\sqrt{90}}{3}$; в) $\frac{\sqrt{25a}}{25}$; г) $\frac{\sqrt{8c}}{10}$; д) $\frac{27}{\sqrt{81x}}$; е) $\frac{20}{\sqrt{50y}}$.

Внесите множитель под знак корня (№ 258–259):

258 а) $3\sqrt{2}$; б) $2\sqrt{5}$; в) $\frac{1}{2}\sqrt{28}$; г) $\frac{1}{3}\sqrt{90}$; д) $4\sqrt{\frac{1}{32}}$; е) $5\sqrt{0{,}4}$; ж) $10\sqrt{2a}$; з) $0{,}5\sqrt{4c}$.

259 а) $-5\sqrt{6}$; б) $-10\sqrt{7}$; в) $-\frac{1}{4}\sqrt{8}$; г) $-6\sqrt{5a}$; д) $-\frac{1}{3}\sqrt{27c}$.

260 Докажите, что данное равенство является верным (сделайте это разными способами):
а) $\sqrt{150} = 5\sqrt{6}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{10} = \sqrt{0{,}02}$; в) $\frac{\sqrt{48}}{2} = 2\sqrt{3}$; г) $10\sqrt{0{,}32} = 4\sqrt{2}$.

261 Сравните значения выражений:
а) $2\sqrt{3}$ и $\sqrt{8}$; б) $\sqrt{45}$ и $3\sqrt{5}$; в) $2\sqrt{6}$ и $6\sqrt{2}$; г) $7\sqrt{3}$ и $3\sqrt{7}$; д) $5\sqrt{\frac{3}{5}}$ и $3\sqrt{\frac{5}{3}}$; е) $\frac{1}{3}\sqrt{20}$ и $\frac{1}{2}\sqrt{8}$.

262 Расположите в порядке возрастания:
а) $3\sqrt{2}$, $2\sqrt{3}$ и 4; б) 5, $2\sqrt{7}$ и $3\sqrt{3}$; в) $4\sqrt{3}$, $2\sqrt{10}$, $5\sqrt{2}$ и $\sqrt{45}$; г) $3\sqrt{6}$, $6\sqrt{2}$, $2\sqrt{13}$ и 8.

263 Упростите произведение:
а) $4\sqrt{5}\cdot\sqrt{45}\cdot\sqrt{50}$; б) $3\sqrt{27}\cdot\sqrt{48}\cdot\sqrt{75}$; в) $2\sqrt{15}\cdot 3\sqrt{6}\cdot 4\sqrt{30}$; г) $5\sqrt{18}\cdot 4\sqrt{40}\cdot 2\sqrt{35}$.

264 Вынесите множитель из-под знака корня:
а) $\sqrt{3^3\cdot 2^2}$; б) $\sqrt{10^5\cdot 2^2}$; в) $\sqrt{5^3\cdot 3^5}$; г) $\sqrt{\frac{3^6}{10^5}}$; д) $\sqrt{\frac{10^7}{2^3}}$.

265 Расположите числа в порядке убывания:
а) $\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2\sqrt{2}}$; б) $\frac{1}{3\sqrt{2}}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{\sqrt{17}}$; в) $\sqrt{\frac{3}{5}}$, $3\sqrt{0{,}1}$, $2\sqrt{0{,}2}$.

266 1) Рассмотрите два выражения: $\sqrt{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$ и $\sqrt{4\sqrt{5}-5\sqrt{4}}$. Какое из них не имеет смысла?
2) Придумайте сами два выражения вида $\sqrt{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}$, где a и b — натуральные числа, одно из которых имеет смысл, а другое нет.

ПРЕОБРАЗОВЫВАЕМ ВЫРАЖЕНИЯ С РАДИКАЛАМИ ПО ПРАВИЛАМ ДЕЙСТВИЙ С МНОГОЧЛЕНАМИ

267 Приведите подобные слагаемые в выражении:
а) $5\sqrt{5} + 6\sqrt{5} - \sqrt{5}$; б) $\sqrt{10} - 3\sqrt{10} + \sqrt{10}$; в) $4\sqrt{a} - 2\sqrt{a} - \sqrt{a}$; г) $\sqrt{c} + 7\sqrt{c} - 10\sqrt{c}$; д) $\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} + 4\sqrt{3}$; е) $5\sqrt{x} - \sqrt{y} - 2\sqrt{x} - 2\sqrt{y}$.

Упростите выражение (№ 268–269):

268 а) $3\sqrt{3} + \sqrt{12}$; б) $\sqrt{45} - 2\sqrt{5}$; в) $\sqrt{48} - 10\sqrt{3}$; г) $4\sqrt{2} - \sqrt{50}$; д) $\sqrt{2} - \sqrt{32} + \sqrt{50}$; е) $2\sqrt{3} - \sqrt{27} + 2\sqrt{48}$.

269 а) $\sqrt{8} + 2\sqrt{18} - \sqrt{72}$; б) $2\sqrt{20} - \sqrt{45} - 2\sqrt{12}$; в) $2\sqrt{28} - 0{,}5\sqrt{24} - \sqrt{54}$.

270 Каким числом — рациональным или иррациональным — является значение выражения? Если это число иррациональное, укажите его десятичное приближение с одним знаком после запятой:
а) $\sqrt{48} - \sqrt{75} + \sqrt{3}$; б) $\sqrt{27} + \sqrt{108} - \sqrt{300}$; в) $\sqrt{162} - \sqrt{200} + \sqrt{8} - 1$; г) $0{,}5 + \sqrt{45} - \sqrt{125} - \sqrt{20}$.

Преобразуйте выражение, используя соответствующую формулу сокращённого умножения (№ 271–273):

271 а) $(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})$; б) $(\sqrt{6} - 1)(\sqrt{6} + 1)$; в) $(\sqrt{7} - \sqrt{5})(\sqrt{7} + \sqrt{5})$; г) $(4 - \sqrt{3})(4 + \sqrt{3})$; д) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{3})$; е) $(\sqrt{10} + \sqrt{11})(\sqrt{11} - \sqrt{10})$.

272 а) $(1 + \sqrt{5})^2$; б) $(\sqrt{10} - 2)^2$; в) $(\sqrt{3} - \sqrt{5})^2$; г) $(\sqrt{7} + \sqrt{2})^2$.

273 а) $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$; б) $(c + \sqrt{x})(c - \sqrt{x})$; в) $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$; г) $(\sqrt{c} + a)^2$; д) $(\sqrt{m} + \sqrt{2})^2$; е) $(\sqrt{3} - \sqrt{n})^2$.

274 Упростите выражение:
а) $(5 - \sqrt{5})^2 + 5\sqrt{5}$; б) $(\sqrt{11} + \sqrt{6})^2 - 17$; в) $30 - (\sqrt{2} + \sqrt{18})^2$.

275 Найдите значение выражения:
а) $a^2 - 4$ при $a = \sqrt{3}$; $\sqrt{3} - 1$; $\sqrt{3} + 2$;
б) $1 - x^2$ при $x = \sqrt{5}$; $\sqrt{5} + 1$; $1 - \sqrt{5}$;
в) $a^2 + b^2$ при $a = \sqrt{2} - 3$ и $b = \sqrt{2} + 3$;
г) $a^2 - c^2$ при $a = 6 + \sqrt{3}$ и $c = 6 - \sqrt{3}$.

276 Найдите площадь квадрата, периметр которого равен $4\sqrt{2} + 16$ см.

277 Найдите площадь прямоугольника, если:
а) его периметр равен 6 см, а одна из сторон равна $\sqrt{2}$ см;
б) его периметр равен 14 см, а одна из сторон равна $3 + \sqrt{2}$ см.

278 Найдите значения выражений $\frac{xy}{x + y}$ и $\frac{x - y}{xy}$:
а) при $x = \sqrt{2}$, $y = \sqrt{8}$; б) при $x = 2 - \sqrt{3}$, $y = 2 + \sqrt{3}$; в) при $x = \sqrt{6} - \sqrt{3}$, $y = \sqrt{6} + \sqrt{3}$; г) при $x = \sqrt{5} + \sqrt{2}$, $y = \sqrt{5} - \sqrt{2}$.

279 Любое неотрицательное число можно представить в виде квадрата некоторого числа с помощью равенства $a = (\sqrt{a})^2$. Этот факт используется для разложения выражений на множители. Например:

$a^2 - 10 = a^2 - (\sqrt{10})^2 = (a - \sqrt{10})(a + \sqrt{10})$;

$x + \sqrt{x} = (\sqrt{x})^2 + \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)$.

Обратите внимание: выражение $x + \sqrt{x}$ имеет смысл при $x \ge 0$, и на множестве допустимых значений возможно представление x в виде $(\sqrt{x})^2$.

1) Разложите на множители выражение:

а) $3 - x^2$; в) $x - 5$, где $x \ge 0$; д) $2 + \sqrt{2}$;

б) $9a^2 - 7$; г) $a - b$, где $a \ge 0$, $b \ge 0$; е) $c - 5\sqrt{c}$.

2) Сократите дробь:

а) $\frac{a^2 - 3}{a - \sqrt{3}}$; б) $\frac{c + \sqrt{6}}{6 - c^2}$; в) $\frac{x - 1}{\sqrt{x} + 1}$; г) $\frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$; д) $\frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$; е) $\frac{5 + \sqrt{10}}{\sqrt{5}}$.

280 Преобразуйте выражение, выполнив указанные действия:

а) $(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})$; в) $(3\sqrt{5} - 2\sqrt{6})^2$;

б) $(\sqrt{32} - 3\sqrt{12})(2\sqrt{8} + \sqrt{108})$; г) $(2 - \sqrt{6})^2 - (5 + \sqrt{2})^2$.

281 Упростите выражение:

а) $\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}$; в) $(\sqrt{10 + \sqrt{19}} + \sqrt{10 - \sqrt{19}})^2$;

б) $\sqrt{4 - \sqrt{7}} \cdot \sqrt{4 + \sqrt{7}}$; г) $(\sqrt{2\sqrt{5} + 4} - \sqrt{2\sqrt{5} - 4})^2$.

282 Докажите, что:

а) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3 + \sqrt{6}} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{6}} = 3$;

б) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} = 2$;

в) $\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} = 1$.

ОСВОБОЖДАЕМСЯ ОТ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТИ В ЗНАМЕНАТЕЛЕ ДРОБИ

283 Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\frac{2}{\sqrt{3}}$; б) $\frac{16}{\sqrt{2}}$; в) $\frac{1}{\sqrt{5}}$; г) $\frac{7}{3\sqrt{7}}$; д) $\frac{2}{3\sqrt{2}}$; е) $\frac{5}{4\sqrt{15}}$.

284 1) Если сумму $4 + \sqrt{6}$ умножить на разность $4 - \sqrt{6}$, то в произведении получится число, не содержащее корня:

$$(4 + \sqrt{6}) \cdot (4 - \sqrt{6}) = 4^2 - (\sqrt{6})^2 = 16 - 6 = 10.$$

Замените в произведении букву A таким двучленом, чтобы после умножения двучлена на двучлен получилось выражение, не содержащее корня:

а) $(2 + \sqrt{3}) \cdot A$; б) $A \cdot (\sqrt{5} - 1)$; в) $(\sqrt{7} + \sqrt{5}) \cdot A$.

2) Разберите, как выполнено преобразование дроби $\frac{2}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}$ в дробь, не содержащую радикалы в знаменателе:

$$\frac{2}{\sqrt{7} - \sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{7} + \sqrt{3})}{(\sqrt{7} - \sqrt{3})(\sqrt{7} + \sqrt{3})} = \frac{2(\sqrt{7} + \sqrt{3})}{(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{2(\sqrt{7} + \sqrt{3})}{7 - 3} = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{2}.$$

Используя этот образец, освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\frac{1}{3 - \sqrt{2}}$; б) $\frac{22}{4 + \sqrt{5}}$; в) $\frac{4}{\sqrt{10} + \sqrt{2}}$; г) $\frac{10}{\sqrt{11} - \sqrt{5}}$.

285 Докажите, что числа $2 - \sqrt{3}$ и $2 + \sqrt{3}$ являются взаимно обратными, а числа $2\sqrt{6} - 5$ и $\frac{1}{2\sqrt{6} + 5}$ — противоположными.

Неверно! После урока алгебры на доске остались следующие выражения:
1) $\frac{3}{\sqrt{12}}$; 2) $\frac{3}{2\sqrt{3}}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{\sqrt{12}}{4}$.
Коля утверждает, что они все равны, а Петя считает, что это не так. Кто из них ошибается?

ИСПОЛЬЗУЕМ В ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ РАВЕНСТВО $\sqrt{x^2} = |x|$

286 Упростите выражение:

а) $\sqrt{c^2}$, где $c > 0$; в) $6\sqrt{a^2}$, где $a \geq 0$; д) $\sqrt{25m^2}$, где $m < 0$;
б) $\sqrt{x^2}$, где $x < 0$; г) $-2\sqrt{y^2}$, где $y < 0$; е) $-\sqrt{16x^2}$, где $x > 0$.

287 1) Разберите, как выполнено преобразование выражения $\sqrt{(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2}$.
Применив равенство $\sqrt{x^2} = |x|$, избавимся от внешнего знака корня:
$$\sqrt{(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2} = |\sqrt{2} - \sqrt{3}|.$$
Чтобы освободиться от модуля, определим знак выражения $\sqrt{2} - \sqrt{3}$. Так как $\sqrt{2} < \sqrt{3}$, то разность $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ есть число отрицательное. Поэтому
$$|\sqrt{2} - \sqrt{3}| = -(\sqrt{2} - \sqrt{3}) = \sqrt{3} - \sqrt{2}.$$
Таким образом, $\sqrt{(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$.
2) Упростите выражение:

а) $\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}$; б) $\sqrt{(2 - \sqrt{7})^2}$; в) $\sqrt{(1 - \sqrt{5})^2}$; г) $\sqrt{(\sqrt{10} - 3)^2}$.

288 Найдите множество допустимых значений переменной и затем вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt{4a^3}$; б) $\sqrt{27c^2}$; в) $\sqrt{25x^5}$; г) $\sqrt{24m^4}$.

289 1) Определите множество допустимых значений переменной x в выражении $\sqrt{x^2}$ и в выражении $(\sqrt{x})^2$.
2) Постройте графики зависимостей, заданных равенствами $y = \sqrt{x^2}$ и $y = (\sqrt{x})^2$.

290 Постройте график зависимостей: а) $y = x\sqrt{x^2}$; б) $y = x(\sqrt{x})^2$.

291

ЗАДАЧА-ИССЛЕДОВАНИЕ

1) Докажите равенства:
$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 1;$$
$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} = \sqrt{4} - 1;$$
$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 1.$$
Подсказка. Освобождайтесь от иррациональности в знаменателях дробей.
2) Подметьте закономерность в цепочке равенств, запишите следующее равенство и докажите его.
3) Упростите сумму:

а) $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$;

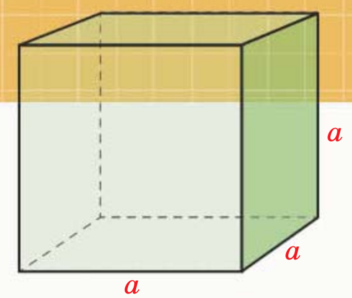
б) $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$.

2.9 КУБИЧЕСКИЙ КОРЕНЬ

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Определение понятия «кубический корень».
- Какие есть возможности для нахождения приближённых значений кубических корней с помощью калькулятора.

К понятию квадратного корня мы пришли, рассматривая задачу о вычислении длины стороны квадрата по его площади. А чтобы ввести понятие кубического корня, обратимся к задаче о нахождении длины ребра куба, объём которого известен.



$V = a^3 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{V}$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КУБИЧЕСКОГО КОРНЯ Пусть объём куба равен 8 см³. Чему равна длина его ребра?

Обозначим длину ребра куба (в сантиметрах) через x. По условию объём куба равен 8 см³. Приходим к уравнению $x^3 = 8$.

Корнем уравнения $x^3 = 8$ является число, куб которого равен 8. Понятно, что такое число только одно и равно оно 2. Говорят, что число 2 — это *кубический корень* из 8.

Уравнение, которое мы рассмотрели, имеет вид $x^3 = a$, где x — переменная, a — некоторое число. Корень этого уравнения называют **кубическим корнем из числа a**. Иными словами:

> **!** число b называют кубическим корнем из числа a, если $b^3 = a$.

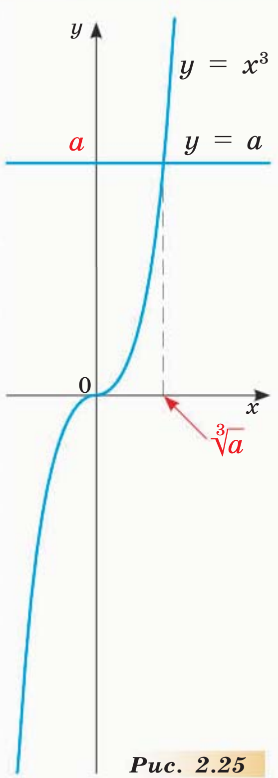


Рис. 2.25

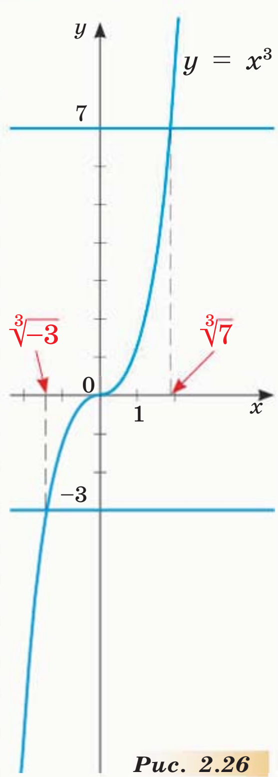


Рис. 2.26

Мы видели, что из числа 8 кубический корень существует: он равен 2. А как обстоит дело в общем случае: для любого ли числа a существует число, куб которого равен a? Чтобы выяснить это, как и в случае с квадратным корнем, обратимся к графику. Только теперь это будет *кубическая парабола* — множество точек плоскости, координаты которых связаны зависимостью $y = x^3$.

На рисунке ***2.25*** изображён график зависимости $y = x^3$ и проведена горизонтальная прямая $y = a$, где a — некоторое число. Кубическая парабола неограниченно уходит вверх и вниз, и из графических соображений ясно, что прямая $y = a$ пересекает её при любом значении a, причём только в одной точке. Ордината точки пересечения кубической параболы и прямой равна a; её абсцисса — это число, куб которого равен a, т. е. абсцисса их точки пересечения есть кубический корень из числа a.

Из этих рассуждений следует, что *для любого числа a существует кубический корень, и этот корень единственный.*

Кубический корень из числа a обозначают символом $\sqrt[3]{a}$. Например:

1) $\sqrt[3]{125}$ — кубический корень из 125,

$\sqrt[3]{125} = 5$, так как $5^3 = 125$;

2) $\sqrt[3]{-8}$ — кубический корень из -8,

$\sqrt[3]{-8} = -2$, так как $(-2)^3 = -8$.

Знак числа $\sqrt[3]{a}$ зависит от знака a (**рис. 2.26**): если $a > 0$, то $\sqrt[3]{a} > 0$; если $a < 0$, то $\sqrt[3]{a} < 0$; если $a = 0$, то $\sqrt[3]{a} = 0$. А так как кубическая парабола симметрична относительно начала координат, то числа $\sqrt[3]{-a}$ и $\sqrt[3]{a}$ противоположны, т. е. при любом a верно равенство $\sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{a}$. Например: $\sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{27} = -3$. $\sqrt[3]{-10} = -\sqrt[3]{10}$.

Сопоставьте выражения $\sqrt{a}$ и $\sqrt[3]{a}$:
- выражение $\sqrt{a}$ имеет смысл, если $a \geq 0$; при всех допустимых значениях a значение выражения $\sqrt{a}$ — число неотрицательное;
- выражение $\sqrt[3]{a}$ имеет смысл при любом значении a; значение выражения $\sqrt[3]{a}$ может быть числом положительным, отрицательным или равным нулю.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ВИДА $x^3 = a$ Результаты, которые мы получили, исследуя вопрос о кубическом корне из произвольного числа a, можно сформулировать иначе, рассмотрев их по отношению к уравнению $x^3 = a$:
- уравнение $x^3 = a$ при любом a имеет единственный корень — число $\sqrt[3]{a}$;
- если $a > 0$, то корень уравнения $x^3 = a$ — число положительное; если $a < 0$, то корень уравнения — число отрицательное; если $a = 0$, то корень равен 0.

НАХОЖДЕНИЕ КОРНЕЙ С ПОМОЩЬЮ КАЛЬКУЛЯТОРА Для извлечения квадратного корня достаточно ввести подкоренное число и нажать кнопку с символом $\sqrt{\ }$, которая имеется на многих калькуляторах. А чтобы вычислить кубический корень, придётся выполнить более сложную последовательность действий. При этом алгоритм извлечения корня может варьироваться в зависимости от того, калькулятор какой марки вы используете.

На некоторых калькуляторах имеется символ $\sqrt[x]{\ }$, и тогда им можно пользоваться для извлечения кубического корня. Но есть и другая возможность. Дело в том, что в математике такие выражения как $\sqrt{a}$ и $\sqrt[3]{a}$, где $a > 0$, записывают в виде степеней $a^{\frac{1}{2}}$ и $a^{\frac{1}{3}}$ соответственно (например, $\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}$). И поэтому для извлечения корня можно использовать кнопку с символом степени y^x.

Операции возведения в куб и извлечения кубического корня взаимно обратны. На символическом языке этот факт выражают равенства

$$(\sqrt[3]{a})^3 = a \text{ и } \sqrt[3]{a^3} = a.$$

Например:

$(\sqrt[3]{2})^3 = 2$, $(\sqrt[3]{-10})^3 = -10$,

$\sqrt[3]{4^3} = 4$, $\sqrt[3]{(-5)^3} = -5$.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- 1) Какое число называют кубическим корнем из числа a? Как он обозначается?

  2) Докажите, что: $\sqrt[3]{64} = 4$, $\sqrt[3]{-1} = -1$; $\sqrt[3]{0} = 0$.
- 1) При каких значениях переменной имеет смысл выражение $\sqrt[3]{a}$? выражение $\sqrt{a}$?

  2) Какие из выражений не имеют смысла: $\sqrt{8}$; $\sqrt{-25}$; $\sqrt[3]{10}$; $\sqrt[3]{-8}$?
- При каких значениях переменной выполняется равенство $(\sqrt[3]{a})^3 = a$? $(\sqrt{a})^2 = a$? Проиллюстрируйте каждое из них числовым примером.
- Решите уравнение:

а) $x^3 = 1000$;	г) $x^3 + 1 = 0$;
б) $x^3 = -0{,}008$;	д) $2x^3 - 6 = 0$;
в) $x^3 = 0{,}125$;	е) $3x^3 + 36 = 0$.

Если корень — число иррациональное, найдите его десятичное приближение с двумя знаками после запятой.

УПРАЖНЕНИЯ

ВЫЧИСЛЯЕМ КУБИЧЕСКИЕ КОРНИ

292 Заполните таблицу кубов натуральных чисел от 1 до 10.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n^3										

С помощью таблицы найдите значение выражения:

а) $\sqrt[3]{27}$; в) $\sqrt[3]{-64}$; д) $\sqrt[3]{729}$; ж) $\sqrt[3]{-512}$; и) $\sqrt[3]{8000}$;
б) $\sqrt[3]{125}$; г) $\sqrt[3]{-216}$; е) $\sqrt[3]{1000}$; з) $\sqrt[3]{343}$; к) $\sqrt[3]{64000}$.

293 Используя таблицу кубов из упражнения 292, вычислите:
а) $\sqrt[3]{-0{,}027}$; б) $\sqrt[3]{\frac{1}{216}}$; в) $\sqrt[3]{0{,}729}$; г) $\sqrt[3]{-\frac{125}{343}}$; д) $\sqrt[3]{-0{,}000064}$.

294 1) Укажите два последовательных целых числа, между которыми заключено значение кубического корня. Ответ запишите в виде двойного неравенства:
а) $\sqrt[3]{40}$; б) $\sqrt[3]{80}$; в) $\sqrt[3]{100}$; г) $\sqrt[3]{200}$; д) $\sqrt[3]{-100}$; е) $\sqrt[3]{-150}$.
2) Покажите примерное положение каждого кубического корня на координатной прямой.

295 1) Какие из чисел 15, −18, 56, −110 являются допустимыми значениями переменной для выражения $\sqrt{a}$? для выражения $\sqrt[3]{a}$?
2) Подставьте в каждое из выражений $\sqrt{a}$ и $\sqrt[3]{a}$ допустимые значения переменной из пункта 1) и укажите два последовательных числа, между которыми заключено значение корня (запишите соответствующие двойные неравенства).

296 а) Объём цилиндра, у которого диаметр основания равен высоте (*рис. 2.27*), вычисляется по формуле $V = 2\pi r^3$, где r — радиус основания. Выразите из этой формулы радиус r.
б) Запишите формулу для вычисления объёма прямоугольного параллелепипеда, в основании которого квадрат со стороной a и высота которого в два раза больше стороны основания (*рис. 2.28*). Выразите из этой формулы сторону основания a.

Рис. 2.27

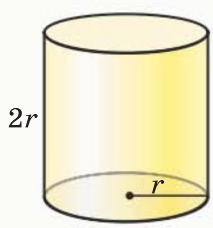
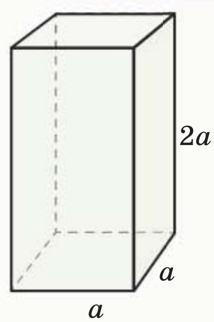


Рис. 2.28



Вычислите значение выражения (№ 297–300):

297 а) $\sqrt[3]{8\cdot 27}$; б) $\sqrt[3]{64\cdot 729}$; в) $\sqrt[3]{216\cdot 0{,}125}$.

298 а) $\sqrt[3]{100\cdot 1250}$; б) $\sqrt[3]{640\cdot 2{,}7}$; в) $\sqrt[3]{80}\cdot\sqrt[3]{34{,}3}$.

299 а) $\sqrt[3]{4^6}$; б) $\sqrt[3]{2^6\cdot 3^3}$; в) $\sqrt[3]{2^9\cdot 3^6\cdot 5^3}$.

300 Вынесите множитель из-под знака корня и приведите подобные слагаемые:
а) $\sqrt[3]{10000} - \sqrt[3]{10}$; б) $\sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{24}$; в) $3\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{54}$.

Свойства кубического корня

1) $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}$

2) $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$, $b \neq 0$

3) $\sqrt[3]{a^n} = a^{\frac{n}{3}}$

(n — натуральное число, кратное 3)

НАХОДИМ ПРИБЛИЖЁННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ КУБИЧЕСКИХ КОРНЕЙ С ПОМОЩЬЮ КАЛЬКУЛЯТОРА

301 Пусть требуется найти с помощью калькулятора десятичное приближение $\sqrt[3]{10}$ с двумя знаками после запятой. Если на калькуляторе есть символ $\sqrt[x]{\ }$, то последовательность действий может быть такой:

$$\boxed{10}\ \boxed{\sqrt[x]{\ }}\ \boxed{3}\ \boxed{=}$$

На экране высветится число 2,1544347. Значит, $\sqrt[3]{10} \approx 2{,}15$.

Так как $\sqrt[3]{10} = 10^{\frac{1}{3}}$, то можно использовать и символ степени y^x. На некоторых калькуляторах значение степени $10^{\frac{1}{3}}$ вычисляется так:

$$\boxed{10}\ \boxed{y^x}\ \boxed{\frac{1}{x}}\ \boxed{3}\ \boxed{=}$$

Ответ, естественно, будет тот же: $\sqrt[3]{10} \approx 2{,}15$.
А какой алгоритм извлечения корней предусмотрен на вашем калькуляторе? Вычислите $\sqrt[3]{60}$ и запишите в виде схемы свою последовательность действий.

302 Найдите с помощью калькулятора десятичное приближение кубического корня с двумя знаками после запятой: а) $\sqrt[3]{0{,}9}$; б) $\sqrt[3]{20}$; в) $\sqrt[3]{100}$; г) $\sqrt[3]{65{,}5}$.
Проконтролируйте себя, возведя найденное число в куб. Получился ли у вас результат, близкий к подкоренному числу?

303 Объём шара вычисляется по формуле $V = \frac{\pi D^3}{6}$, где D — диаметр шара. Выразите из этой формулы диаметр шара D. Найдите приближённое значение диаметра с точностью до целых, если $V = 34$ дм³, $\pi \approx 3{,}14$.

304 1) Составьте таблицу значений $\sqrt[3]{x}$ для $x = 0;\ 0{,}5;\ 1;\ 2;\ \ldots;\ 8$. (Приближённые значения $\sqrt[3]{x}$ указывайте с одним знаком после запятой.)
2) Составьте таблицу для противоположных (отрицательных) значений x.
3) Постройте в координатной плоскости график зависимости $y = \sqrt[3]{x}$.
4) Опишите свойства графика зависимости $y = \sqrt[3]{x}$ подобно тому, как это сделано для графика зависимости $y = \sqrt{x}$ (см. с. 59).

305 Познакомьтесь с древней *легендой*. Однажды на острове Делос вспыхнула эпидемия чумы. Островитяне отправились за помощью к известному оракулу, жившему при храме бога Аполлона у подножия горы Парнас. Они хотели узнать, как им смягчить разгневанного бога Солнца. Оракул ответил, что нужно вдвое увеличить золотой жертвенник в храме, который был выполнен в форме куба. Делосцы изготовили из золота жертвенник, ребро которого было вдвое больше ребра прежнего. Однако чума не прекращалась, и островитяне потребовали объяснений у оракула. Тот ответил, что они неправильно выполнили повеление бога: надо было увеличить вдвое не ребро куба, а его объём.

Ответьте на вопросы:
1) Во сколько раз увеличится объём куба, если его ребро увеличить вдвое?
2) Как надо изменить ребро куба, чтобы его объём увеличился вдвое? (Дайте точный ответ и его десятичное приближение с двумя знаками после запятой.)
Изобразите два куба, у одного из которых объём примерно вдвое больше объёма другого куба.

УЗНАЙТЕ БОЛЬШЕ

ДВОЙНЫЕ РАДИКАЛЫ

Двойным радикалом называют выражение вида $\sqrt{a + b\sqrt{c}}$, где a, b, c — целые числа. (Считается, что из числа c корень не извлекается.) При преобразовании двойного радикала стремятся освободиться от внешнего корня.

Если подкоренное выражение можно представить в виде квадрата двучлена, то освободиться от внешнего корня легко.

Пример 1. Упростим двойной радикал $\sqrt{11 - 6\sqrt{2}}$.

Попробуем представить выражение $11 - 6\sqrt{2}$ в виде квадрата разности. Для этого будем рассматривать $6\sqrt{2}$ как удвоенное произведение двух чисел: $6\sqrt{2} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2}$. Так как $3^2 = 9$, $(\sqrt{2})^2 = 2$ и $9 + 2 = 11$, то

$$\sqrt{11 - 6\sqrt{2}} = \sqrt{3^2 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{(3 - \sqrt{2})^2} = |3 - \sqrt{2}| = 3 - \sqrt{2}.$$

Иногда двойной радикал $\sqrt{a + b\sqrt{c}}$ нельзя представить в том же виде, что и подкоренное выражение, но тем не менее от внешнего знака корня избавиться всё же удаётся.

Пример 2. Попытаемся, например, представить выражение $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$ в виде суммы $\sqrt{x} + \sqrt{y}$, где x и y — натуральные числа. Сделаем это так:

$$\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} = \sqrt{x} + \sqrt{y},$$
$$5 + 2\sqrt{6} = x + y + 2\sqrt{xy}.$$

Будем искать такие числа x и y, чтобы были равны по отдельности и целые, и иррациональные слагаемые, записанные в левой и правой частях равенства:

$$x + y = 5, \qquad xy = 6.$$

Есть две пары чисел, удовлетворяющие этим условиям: $x = 2$, $y = 3$ и $x = 3$, $y = 2$. Однако понятно, что ответ у задачи только один:

$$\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} = \sqrt{2} + \sqrt{3}.$$

1 Упростите выражение, воспользовавшись в качестве образца примером 1:
а) $\sqrt{27 + 10\sqrt{2}}$; б) $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$; в) $\sqrt{16 - 6\sqrt{7}}$.

2 Упростите выражения, воспользовавшись в качестве образца примером 2:
а) $\sqrt{7 + 2\sqrt{10}}$ и $\sqrt{7 - 2\sqrt{10}}$; б) $\sqrt{8 + 2\sqrt{15}}$ и $\sqrt{8 - 2\sqrt{15}}$.

3 1) Докажите *формулу двойного радикала*:

$$\sqrt{a + b\sqrt{c}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2c}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b^2c}}{2}}, \text{ где } b > 0.$$

2) Рассмотренная формула представляет интерес, если выражение $a^2 - b^2c$ является квадратом натурального числа. Примените эту формулу для упрощения выражения:
а) $\sqrt{12 + 2\sqrt{11}}$; б) $\sqrt{57 + 12\sqrt{15}}$.

4 Докажите формулу

$$\sqrt{a - b\sqrt{c}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2c}}{2}} - \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b^2c}}{2}}, \text{ где } b > 0,$$

и примените её для упрощения выражения $\sqrt{57 - 12\sqrt{15}}$.

ПОДВЕДЁМ ИТОГИ

Основные термины, обозначения, факты

Число b называют *квадратным корнем* из числа a, если $b^2 = a$.

Квадратные корни из числа 16 — числа 4 и − 4, так как $4^2 = 16$ и $(-4)^2 = 16$.

Если $a > 0$, то квадратных корней два; их обозначают $\sqrt{a}$ и $-\sqrt{a}$. Если $a = 0$, то квадратный корень из a единственный. Если $a < 0$, то квадратный корень из a не существует.

Квадратные корни из 10 — числа $\sqrt{10}$ и $-\sqrt{10}$. Выражение $\sqrt{-16}$ смысла не имеет.

Неотрицательный квадратный корень из числа a, т. е. число $\sqrt{a}$, называют *арифметическим квадратным корнем из a*.

Число $\sqrt{16} = 4$ — арифметический квадратный корень из 16.

Если положительное число a не является квадратом натурального или дробного числа, то число $\sqrt{a}$ — **иррациональное.** Иррациональные числа приближённо выражают десятичными дробями.

Примеры иррациональных чисел: $\sqrt{3}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{2,5}$, π; $\sqrt{3} \approx 1,73$, $\sqrt{10} \approx 3,16$, $\sqrt{2,5} \approx 1,58$, $\pi \approx 3,14$.

Решение уравнений вида $x^2 = a$

Если $a > 0$, то уравнение $x^2 = a$ имеет два противоположных корня: $\sqrt{a}$ и $-\sqrt{a}$.
Если $a = 0$, то уравнение $x^2 = a$ имеет единственный корень — число 0
Если $a < 0$, то уравнение $x^2 = a$ корней не имеет.

Корни уравнения $x^2 = 8$: $x_1 = \sqrt{8}$, $x_2 = -\sqrt{8}$.
Корень уравнения $x^2 = 0$ — число 0.
Уравнение $x^2 = -9$ корней не имеет.

Свойства квадратных корней

Для любого $a \geq 0$ верно равенство $(\sqrt{a})^2 = a$.

$(\sqrt{3,5})^2 = 3,5$.

Для любого a верно равенство $\sqrt{a^2} = |a|$.

$\sqrt{(-8,4)^2} = |-8,4| = 8,4$.

Для любых $a \geq 0$ и $b \geq 0$ $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ — свойство корня из произведения.

$\sqrt{25\cdot 49} = \sqrt{25}\cdot\sqrt{49} = 5\cdot 7 = 35$.

Для любых $a \geq 0$ и $b > 0$ $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ — свойство корня из частного.

$\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4} = 0,75$.

Для любого $a \geq 0$ и $n = 2k$, где $k \in N$, $\sqrt{a^n} = a^{\frac{n}{2}}$ — свойство корня из степени.

$\sqrt{3^8} = 3^{8:2} = 3^4 = 81$.

Правила умножения и деления корней:
$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{a\cdot b}$ ($a \geq 0$ и $b \geq 0$) и $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ ($a \geq 0$, $b > 0$).

$\sqrt{12}\cdot\sqrt{3} = \sqrt{12\cdot 3} = \sqrt{36} = 6$;
$\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{45}{5}} = \sqrt{9} = 3$.

Преобразование выражений, содержащих радикалы

Вынесение множителя из-под знака корня и внесение множителя под знак корня выполняются на основе свойства корня из произведения.

$\sqrt{60} = \sqrt{4\cdot 15} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{15} = 2\sqrt{15}$

$-0{,}5\sqrt{28} = -\sqrt{0{,}25}\cdot\sqrt{28} = -\sqrt{0{,}25\cdot 28} = -\sqrt{7}.$

Приведение подобных радикалов выполняется на основе правила приведения подобных слагаемых.

$\underline{6\sqrt{5}} - \sqrt{6} - \underline{5\sqrt{5}} = \sqrt{5} - \sqrt{6}.$

Освобождение от иррациональности в знаменателе дроби выполняется на основе основного свойства дроби.

$\frac{7}{2\sqrt{3}} = \frac{7\cdot\sqrt{3}}{2\cdot(\sqrt{3})^2} = \frac{7\sqrt{3}}{2\cdot 3} = \frac{7\sqrt{3}}{6}.$

1 а) Найдите квадратные корни из числа: 64; $\frac{4}{9}$; 0,49; 3; 2,7.

б) Найдите арифметический квадратный корень из числа: 100; $\frac{1}{4}$; 0,09; 5.

2 Вычислите: а) $\sqrt{81}$; б) $\sqrt{\frac{9}{16}}$; в) $\sqrt{0{,}64}$.

3 Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{2x-1}$ при $x = 0{,}58$; б) $0{,}5\sqrt{x+y}$ при $x = -1{,}75$, $y = 2$.

4 Площадь квадрата, диагональ которого равна b, можно вычислить по формуле $S = \frac{b^2}{2}$. Выразите из этой формулы диагональ квадрата b.

5 Между какими последовательными целыми числами заключено число $\sqrt{89}$?

6 Сравните числа: а) $\sqrt{26}$ и $\sqrt{62}$; б) $\sqrt{234}$ и 16; в) $-\sqrt{5}$ и $-\sqrt{6}$.

7 Покажите на координатной прямой примерное положение чисел $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, $\sqrt{52}$, $-\sqrt{52}$.

8 Чему равно расстояние между домами A и B, расположенными на двух взаимно перпендикулярных улицах, если дом A расположен в 2 км от перекрёстка, а дом B — в 1,5 км от этого перекрёстка?

9 Решите уравнение:

а) $x^2 = 64$; в) $x^2 + 25 = 0$; д) $3x^2 + 27 = 0$;

б) $x^2 - 144 = 0$; г) $x^2 - 5 = 0$; е) $4x^2 + 2 = 10$.

10 Вычислите, не пользуясь калькулятором:

а) $\sqrt{0{,}25\cdot 0{,}36}$; б) $\sqrt{\frac{256}{81}}$; в) $\sqrt{3^2\cdot 5^4\cdot 2^6}$.

11 Упростите выражение:

а) $5\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}$; б) $3\sqrt{5}\cdot 4\sqrt{20}$; в) $\frac{2(\sqrt{5})^2}{10}$; г) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{50}}$; д) $\frac{2\sqrt{10}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{80}}$.

12 Вынесите множитель из-под знака корня в выражении $\sqrt{150}$; $0{,}5\sqrt{32}$.

13 Внесите множитель под знак корня в выражении: $4\sqrt{2}$, $-2\sqrt{3}$.

14 Сравните числа $5\sqrt{3}$ и $3\sqrt{6}$.

15 Упростите выражение:

а) $3\sqrt{20} - 3\sqrt{45} + 4\sqrt{5}$; б) $(1 + \sqrt{3})^2$; в) $(\sqrt{7} - 2)(\sqrt{7} + 2)$.

16 Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби: а) $\frac{6}{\sqrt{3}}$; б) $\frac{1}{\sqrt{7}-2}$.

17 Найдите значение выражения $2y^2 - 3$ при $y = 1 - \sqrt{2}$.

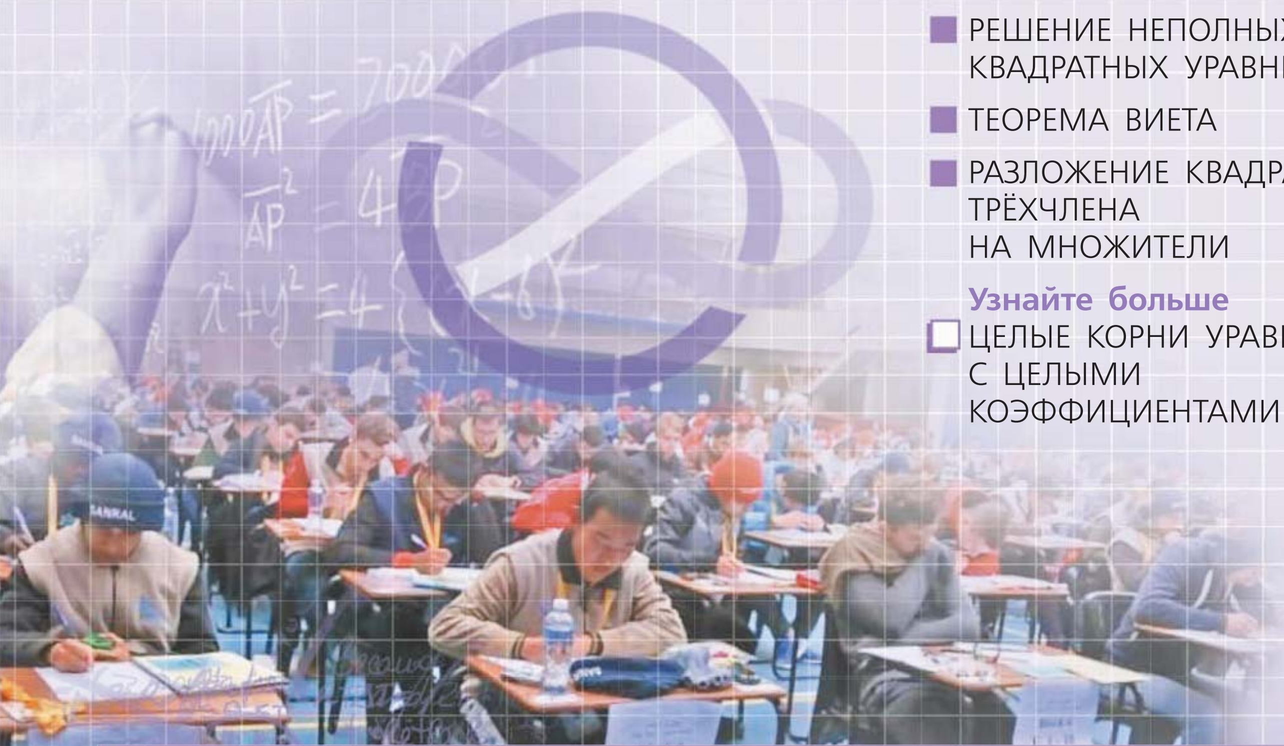
ГЛАВА 3

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

- КАКИЕ УРАВНЕНИЯ НАЗЫВАЮТ КВАДРАТНЫМИ
- ФОРМУЛА КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ
- ВТОРАЯ ФОРМУЛА КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ
- РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ
- РЕШЕНИЕ НЕПОЛНЫХ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ
- ТЕОРЕМА ВИЕТА
- РАЗЛОЖЕНИЕ КВАДРАТНОГО ТРЁХЧЛЕНА НА МНОЖИТЕЛИ

Узнайте больше

- ЦЕЛЫЕ КОРНИ УРАВНЕНИЯ С ЦЕЛЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ



МЕЖДУНАРОДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Международная математическая олимпиада (IMO) — ежегодная олимпиада для школьников, старейшая из предметных олимпиад. Первая такая олимпиада была проведена в 1959 году в Румынии, с тех пор она проводится каждый год. Первое десятилетие участие в ней принимали в основном страны Восточной Европы, но постепенно олимпиада набрала популярность во всём мире, и сейчас в ней участвуют более ста стран, представляющих пять континентов.

От каждой страны выступает команда из шести участников. Каждый участник должен решить шесть задач — по три задачи в день в течение двух дней. Задачи из разных областей школьной математики — геометрии, теории чисел, алгебры, комбинаторики, они не требуют знаний высшей математики и нередко имеют красивое короткое решение. И если часть задач можно назвать трудными, но посильными, то на каждой олимпиаде встречается задача, которую из нескольких сотен лучших в своих странах школьников-математиков решают не более пяти–десяти участников.

Важной составляющей IMO является не только соревнование, но и обмен опытом, банком задач, знакомство с математическими традициями страны, принимающей олимпиаду. Трижды олимпиада проводилась в Москве.

Официально IMO — это личное первенство, но, как и в спортивных олимпиадах, здесь составляется и неофициальный командный рейтинг, который свидетельствует, что самыми сильными традиционно являются команды Китая, Кореи, США и, конечно, России.

3.1 КАКИЕ УРАВНЕНИЯ НАЗЫВАЮТ КВАДРАТНЫМИ

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- В чём отличие квадратного уравнения от других уравнений.
- Приём решения квадратного уравнения.

Задачи на квадратные уравнения встречаются уже в астрономическом трактате, который составил в 499 г. Ариабхата (476 — ок. 550) — индийский астроном и математик.

При решении задач алгебраическим способом, часто возникает необходимость решать не только линейные уравнения. Такая потребность возникала ещё в древности и была связана с нахождением площадей земельных участков, с земельными работами военного характера, с развитием астрономии. С новым для вас видом уравнения — квадратным уравнением — вы познакомитесь в этом пункте.

КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ Решим задачу: «Катеты прямоугольного треугольника меньше его гипотенузы соответственно на 2 см и на 4 см. Чему равны длины сторон этого треугольника?»

Пусть длина гипотенузы x см, тогда длины катетов равны $(x - 2)$ см и $(x - 4)$ см. В соответствии с теоремой Пифагора

$$(x - 2)^2 + (x - 4)^2 = x^2.$$

Выполнив преобразования, получим уравнение $x^2 - 4x + 4 + x^2 - 8x + 16 = x^2$, т. е.

$$x^2 - 12x + 20 = 0.$$

Левая часть этого уравнения — многочлен второй степени. Чтобы найти его корни, мы воспользуемся специальным приёмом — выделим в левой его части *полный квадрат*, т. е. многочлен, который можно свернуть в квадрат двучлена.

Если к выражению $x^2 - 12x$ прибавить число 36, то получится трёхчлен $x^2 - 12x + 36$, равный $(x - 6)^2$. Поэтому прибавим к левой части уравнения число 36, а чтобы равенство не нарушилось, одновременно вычтем его. Будем иметь

$$x^2 - 12x + 36 - 36 + 20 = 0,$$
$$(x - 6)^2 - 16 = 0,$$
$$(x - 6)^2 = 16.$$

Отсюда $x - 6 = 4$ или $x - 6 = -4$, т. е.

$$x = 10 \text{ или } x = 2.$$

Таким образом, уравнение $x^2 - 12x + 20 = 0$ имеет два корня: 10 и 2. Однако условию задачи удовлетворяет только число 10. Действительно, при $x = 2$ значения выражений $x - 2$ и $x - 4$ не могут служить длинами сторон треугольника.

Итак, длина гипотенузы прямоугольного треугольника равна 10 см, а длины катетов — 8 см и 6 см.

Уравнение $x^2 - 12x + 20 = 0$, которое мы составили по условию задачи, называют *квадратным*.

> **!** **Квадратным уравнением называется уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$,**
> **где a, b и c — произвольные числа, причём $a \neq 0$.**

Числа a, b и c — это *коэффициенты* квадратного уравнения. Число a называют первым или старшим коэффициентом, b — вторым коэффициентом, а c — свободным членом.

Квадратное уравнение $x^2 - 12x + 20 = 0$ имеет коэффициенты $a = 1$, $b = -12$, $c = 20$.

Приведём ещё примеры квадратных уравнений:

$5x^2 - 6x + 10 = 0$, $-x^2 + x - 4{,}5 = 0$, $\sqrt{2}x^2 - 5x = 0$, $\frac{1}{3}x^2 - 12 = 0$. (Назовите коэффициенты каждого из них.)

ПРИЁМ РЕШЕНИЯ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ Квадратное уравнение, первый коэффициент которого равен 1, называют *приведённым*. Неприведённое квадратное уравнение всегда можно преобразовать в приведённое, имеющее те же корни. Для этого надо разделить обе его части на коэффициент при x^2.

Например, уравнение $-2x^2 + 10x - 8 = 0$ можно заменить приведённым уравнением $x^2 - 5x + 4 = 0$.

Чтобы решить уравнение $x^2 - 12x + 20 = 0$, составленное по условию задачи, мы воспользовались **приёмом выделения квадрата двучлена**. Решим ещё несколько уравнений этим же способом.

Пример 1. Решим уравнение $x^2 - 6x + 7 = 0$.

Так как $x^2 - 6x = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3$, то, чтобы получить в левой части уравнения квадрат двучлена, прибавим число 9 и вычтем его.

Получим

$$x^2 - 6x + 9 - 9 + 7 = 0,$$
$$(x - 3)^2 - 2 = 0,$$
$$(x - 3)^2 = 2.$$

Отсюда $x - 3 = \sqrt{2}$ или $x - 3 = -\sqrt{2}$, т. е. $x = 3 + \sqrt{2}$ или $x = 3 - \sqrt{2}$.

Итак, уравнение имеет два корня:

$$3 + \sqrt{2} \text{ и } 3 - \sqrt{2}.$$

Пример 2. Решим уравнение $x^2 - 10x + 25 = 0$.

Так как $x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$, то уравнение можно записать в виде $(x - 5)^2 = 0$. Отсюда $x - 5 = 0$, т. е. $x = 5$. Значит, уравнение имеет один корень — число 5.

Пример 3. Решим уравнение $2x^2 + 6x + 5 = 0$.

Преобразуем сначала уравнение в приведённое. Для этого разделим обе его части на 2.

Получим $x^2 + 3x + \frac{5}{2} = 0$.

Теперь выделим в левой части уравнения квадрат двучлена: $x^2 + 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + \frac{5}{2} = 0$.

Получим $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = 0$, т. е. $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4}$.

Левая часть уравнения при любом x неотрицательна, а в правой части записано отрицательное число. Значит, уравнение корней не имеет.

Вот одна из задач индийского математика и астронома XII в. Бхаскары.

«Обезьянок резвых стая,
Всласть поевши, развлекалась.
Их в квадрате часть восьмая
На поляне забавлялась...
А двенадцать по лианам
Стали прыгать, повисая...
Сколько ж было обезьянок,
Ты скажи мне, в этой стае?»

Решение в современных обозначениях выглядит так:

$$\left(\frac{x}{8}\right)^2 + 12 = x,$$

т. е. $x^2 - 64x = -768$, и, чтобы дополнить левую часть этого уравнения до квадрата, он прибавляет к обеим частям 32^2:

$$(x - 32)^2 = 256,\ x - 32 = \pm 16,$$
$$x = 16 \text{ и } x = 48.$$

Учёные мечтали о создании вечного двигателя. Бхаскара в своих трудах описал концепцию «вечно вращающегося колеса» и она получила развитие в изобретениях.

«Вечное» водяное колесо. Модель

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Сформулируйте определение квадратного уравнения. Приведите пример.
- Уравнение $-2x^2 - 4x + 6 = 0$ замените приведённым квадратным уравнением, имеющим те же корни.
- Решите уравнение $x^2 + 2x - 3 = 0$ приёмом выделения квадрата двучлена.

УПРАЖНЕНИЯ

СОСТАВЛЯЕМ КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

306 Укажите коэффициенты a, b и c квадратного уравнения:
а) $7x^2 - 8x + 4 = 0$; б) $-2x^2 + \sqrt{2}x - 1 = 0$; в) $-x^2 + 3x = 0$; г) $x^2 - 124 = 0$.

307 Составьте квадратные уравнения, если известны их коэффициенты:
1) $a = 4$, $b = 7$, $c = 2$ и $a = 8$, $b = 3$, $c = 4$;
2) $a = 1$, $b = 0{,}5$, $c = -1$ и $a = -1$, $b = 1$, $c = 0{,}3$;
3) $a = 5$, $b = 0$, $c = -3$ и $a = -3$, $b = 5$, $c = 0$;
4) $a = -3$, $b = \sqrt{2}$, $c = 1$ и $a = \sqrt{3}$, $b = 4$, $c = -5$.
Может ли коэффициент a в квадратном уравнении быть равным 0?

308 Покажите, что:
а) числа -7 и 5 являются корнями уравнения $x^2 + 2x - 35 = 0$;
б) число $\frac{2}{3}$ является корнем уравнения $3x^2 + x - 2 = 0$, а число -2 не является;
в) числа $1 - \sqrt{2}$ и $1 + \sqrt{2}$ являются корнями уравнения $x^2 - 2x - 1 = 0$;
г) число $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ является корнем уравнения $x^2 - x - 1 = 0$, а число $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ не является.

309 Укажите коэффициент b в квадратном уравнении $x^2 + bx + 3 = 0$, имеющем корни: а) 1 и 3; б) -1 и -3.

310 Укажите коэффициент c в квадратном уравнении $x^2 - x + c = 0$, имеющем корни: а) -1 и 2; б) -2 и 3.

311 Приведите уравнение к виду $ax^2 + bx + c = 0$:
а) $2x^2 + 5x = x^2 + 3$; б) $(x + 1)^2 = x + 6$; в) $x^2 - 7 = (3 - x)(3 + x)$.

312 По условию задачи составьте уравнение и приведите его к виду $ax^2 + bx + c = 0$.
«От квадрата задуманного натурального числа отняли 10 и получили число, на 2 большее задуманного. Какое число задумано?»
Проверьте, верно ли утверждение:
1) Все коэффициенты квадратного уравнения — отрицательные числа.
2) Уравнение имеет корни -3 и 4.
3) Ответ: задумано число 4.

313 Составьте все возможные квадратные уравнения, коэффициентами которых являются числа: а) 1; 6 и 5; б) 8; 2 и -3; в) 4; 1 и 0.

ПРИМЕНЯЕМ ПРИЁМ ВЫДЕЛЕНИЯ КВАДРАТА ДВУЧЛЕНА

314 Подберите недостающий член квадратного трёхчлена так, чтобы его можно было представить в виде квадрата двучлена:
а) $x^2 + 8x + \ldots$; б) $x^2 - 18x + \ldots$; в) $z^2 + 3z + \ldots$; г) $a^2 + a + \ldots$.

315 Заполните пропуски в цепочке равенств:
а) $x^2 + 4x - 1 = x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + \ldots - \ldots - 1 = (x + \ldots)^2 - \ldots$;
б) $b^2 - 3b + 3 = b^2 - 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot b + \ldots - \ldots + 3 = (\ldots - \ldots)^2 + \ldots$.

316 Выделите квадрат двучлена:
а) $a^2 - 6a + 15$; б) $p^2 - 7p - 10$; в) $b^2 + b + 1$.

Решите уравнение (№ 317–318):

317 а) $(x + 5)^2 = 4$; б) $(x - 2)^2 = 3$; в) $(x + 7)^2 = 0$; г) $(x - 6)^2 = -9$.

318 а) $(x + 2)^2 - 9 = 0$; в) $(x - 3)^2 = 0{,}25$;
б) $(x - 1)^2 - 2 = 0$; г) $(x - 5)^2 + 4 = 0$.

319 Решите уравнение, выделив квадрат двучлена:
а) $x^2 + 12x + 20 = 0$; в) $z^2 - 6z + 9 = 0$; д) $x^2 + 2x - 0{,}69 = 0$;
б) $y^2 + 14y + 24 = 0$; г) $y^2 - 2y + 3 = 0$; е) $x^2 + x + 0{,}25 = 0$.
Подсказка. В качестве образцов используйте примеры 1 и 2.

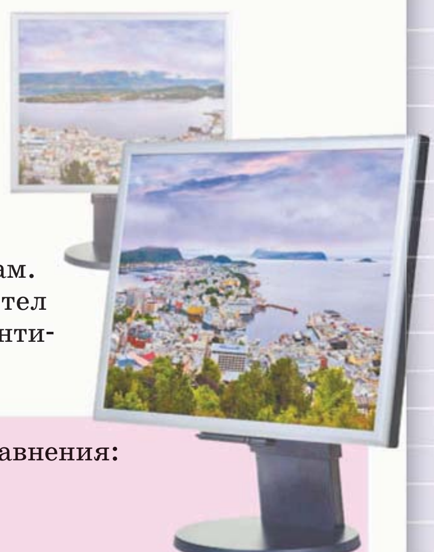
320 Решите уравнение:
а) $3x^2 - 4x - 4 = 0$; в) $9x^2 - 6x + 1 = 0$; д) $2x^2 + 7x + 6 = 0$;
б) $2x^2 + 3x + 6 = 0$; г) $x^2 - 2x + 2 = 0$; е) $4x^2 - 12x + 9 = 0$.
Подсказка. Воспользуйтесь образцом, приведённым в примере 3.

321 Составьте какое-нибудь квадратное уравнение, которое:
а) не имеет корней; в) имеет два иррациональных корня;
б) имеет два целых корня; г) имеет один корень.

322 Выделите в трёхчлене квадрат двучлена:
а) $x^2 - 2x + c$; б) $x^2 + bx + c$.

323 Покажите, что:
а) числа m и n являются корнями уравнения $x^2 - (m + n)x + mn = 0$;
б) числа $m + n$ и $m - n$ являются корнями уравнения $x^2 - 2mx + m^2 - n^2 = 0$.
Составьте уравнения такого вида, подставив вместо m и n конкретные числа, и укажите корни каждого составленного уравнения.

324 МАТЕМАТИКА ВОКРУГ НАС При выборе монитора для компьютера прежде всего обращают внимание на его характеристики, в частности на длину диагонали экрана и соотношение его сторон. Артём через Интернет выбрал монитор, для которого в характеристиках записано, что длина экрана относится к ширине как 4:3, а диагональ равна 17 дюймам. Артём заинтересовался размерами экрана и захотел вычислить их длины сначала в дюймах, а затем в сантиметрах (1 дюйм = 2,54 см). Возможно ли это?



Неверно! Объясните, в чём ошибка в решении уравнения:
$x^2 + 2x + 0{,}91 = 0$.
$x^2 + 2x + 1 - 1 + 0{,}91 = 0$,
$(x + 1)^2 - 0{,}09 = 0$,
$(x + 1)^2 = 0{,}09$,
$x + 1 = 0{,}03$ или $x + 1 = -0{,}03$,
$x = -0{,}97$ или $x = -1{,}03$.

3.2 ФОРМУЛА КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Формулу для решения квадратных уравнений.
- Как, не решая квадратного уравнения, узнать, имеет ли оно корни.

До сих пор мы решали квадратные уравнения выделением квадрата двучлена. Однако этот способ довольно трудоёмок и в практическом отношении не очень удобен. Поэтому мы выведем формулу корней квадратного уравнения, решив его в общем виде.

ВЫВОД ФОРМУЛЫ КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ Рассмотрим уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$. Выделим в левой его части квадрат двучлена. Для этого:

— преобразуем уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ в приведённое:	$x^2 + \frac{b}{a}\cdot x + \frac{c}{a} = 0;$
— представим второе слагаемое в виде удвоенного произведения, в котором один множитель есть x:	$x^2 + 2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x + \frac{c}{a} = 0;$
— прибавим к левой части уравнения выражение $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ и вычтем его:	$x^2 + 2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0;$
— три первых слагаемых свернём в квадрат двучлена:	$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0;$
— остальные слагаемые перенесём в правую часть уравнения и запишем правую часть в виде дроби:	$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$

Знаменатель дроби $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ положителен, значит, её знак зависит от знака числителя $b^2 - 4ac$. Это выражение обозначают специальным символом — буквой D:

$$b^2 - 4ac = D.$$

Запишем уравнение, используя символ D:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{4a^2}.$$

Понятно, что возможны три случая:

$$D > 0,\ D = 0,\ D < 0.$$

1. Пусть $D > 0$, а значит, $\frac{D}{4a^2} > 0$. Существуют два квадратных корня из этого числа: $\frac{\sqrt{D}}{2a}$ и $-\frac{\sqrt{D}}{2a}$. Отсюда

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{D}}{2a} \text{ или } x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{D}}{2a},$$

$$x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a} \text{ или } x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a},$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \text{ или } x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

2. Пусть $D = 0$. Тогда уравнение примет вид

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0.$$

Отсюда $x + \frac{b}{2a} = 0$, т. е. $x = -\frac{b}{2a}$.

3. Пусть $D < 0$, тогда $\frac{D}{4a^2} < 0$. Но левая часть уравнения при любом x неотрицательна. Значит, корней у уравнения нет.

Решением квадратных уравнений учёные занимались ещё в глубокой древности, более двух тысячелетий тому назад. Интересно, что математики Древней Греции рассматривали три вида квадратных уравнений. В современной записи они выглядели бы так: $ax^2 + bx = c$, $ax^2 + c = bx$, $ax^2 = bx + c$. Каждое из них решалось особым способом — геометрически.

Почему же у древнегреческих математиков было больше видов квадратных уравнений, чем у нас? Всё дело в том, что они ещё не знали отрицательных чисел, не умели переносить члены уравнения из одной части в другую — всё это появилось в процессе развития алгебры лишь много веков спустя. Благодаря Франсуа Виету, создателю современной символики алгебры, три «древних» вида квадратных уравнений слились в один: $ax^2 + bx + c = 0$.

Таким образом, существование корней уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ и их число зависят от знака выражения $b^2 - 4ac$. Его называют *дискриминантом квадратного уравнения* и обозначают буквой D. Термин «дискриминант» произошёл от латинского слова *discriminare*, что в переводе означает «различать», «разделять». По дискриминанту квадратного уравнения можно узнать, имеет ли это уравнение корни или нет, а если имеет, то сколько — два корня или один.

> Если $D > 0$, то уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два корня. Корни уравнения принято обозначать символами x_1 и x_2.
> Если $D = 0$, то уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет один корень.
> Если $D < 0$, то уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ корней не имеет.

Формулы решения некоторых квадратных уравнений были изложены впервые в Европе в «Книге абака», написанной в 1202 г. итальянским математиком Леонардо Фибоначчи.

Итальянские математики Тарталья, Кардано, Бомбелли в XIV в. учитывали как положительные, так и отрицательные корни. Но лишь в XVII в. благодаря трудам Декарта, Ньютона и других учёных способ решения квадратных уравнений принимает современный вид.

РЕШЕНИЕ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ ПО ФОРМУЛЕ

Пример 1. Решим уравнение $6x^2 - x - 2 = 0$.

Вычислим дискриминант:

$D = (-1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-2) = 1 + 48 = 49$, т. е. $D > 0$.

Воспользуемся формулой корней:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{12};\ x = \frac{1 \pm 7}{12}.$$

Отсюда $x_1 = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2}$.

Ответ. $\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{2}$.

Пример 2. Решим уравнение $-x^2 + 2x - 2 = 0$.

Сначала поменяем знаки всех членов уравнения на противоположные, умножив обе его части на -1. Так целесообразно поступать всегда при решении уравнений с отрицательным первым коэффициентом.

Получим уравнение $x^2 - 2x + 2 = 0$.

Найдем дискриминант:

$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 4 - 8 = -4$, т. е. $D < 0$.

Ответ. Уравнение корней не имеет.

Пример 3. Решим уравнение $x^2 + 0{,}2x + 0{,}01 = 0$.

Преобразуем уравнение так, чтобы его коэффициенты стали целыми числами. Для этого умножим обе его части на 100. Получим $100x^2 + 20x + 1 = 0$.

Найдём дискриминант: $D = 20^2 - 4 \cdot 100 \cdot 1 = 0$, т. е. $D = 0$. По формуле корней получим $x = -0{,}1$.

Ответ. $-0{,}1$.

Заметим, что последнее уравнение можно было бы решить проще, если увидеть, что трёхчлен в левой его части можно «свернуть» в квадрат двучлена. Тогда уравнение $100x^2 + 20x + 1 = 0$ примет вид $(10x + 1)^2 = 0$. Значит, $10x + 1 = 0$, т. е. $x = -0{,}1$.

Формула корней квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0$$

при $D \geq 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},$$

где $D = b^2 - 4ac$.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Какое выражение называют дискриминантом квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$? Сколько корней может иметь квадратное уравнение и как это зависит от дискриминанта? Запишите формулу корней квадратного уравнения.
- Решите уравнение

  $3x^2 - 5x - 2 = 0$.

УПРАЖНЕНИЯ

РЕШАЕМ КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

325 Вычислив дискриминант, определите, имеет ли уравнение корни и сколько:
а) $x^2 + 7x - 18 = 0$; в) $4x^2 - 4x + 1 = 0$; д) $9x^2 + 12x + 4 = 0$;
б) $a^2 + a + 6 = 0$; г) $5y^2 - 3y + 2 = 0$; е) $z^2 - z - 3 = 0$.

Убедитесь, что уравнение имеет два корня, и найдите эти корни (№ 326–327):

326 а) $2x^2 + 3x + 1 = 0$; в) $4x^2 - 11x - 3 = 0$; д) $2y^2 + 5y + 3 = 0$;
б) $3y^2 + 7y - 6 = 0$; г) $3x^2 + 7x + 2 = 0$; е) $6x^2 - 13x - 5 = 0$.

327 а) $x^2 + 5x - 6 = 0$; в) $y^2 - 2y - 3 = 0$; д) $x^2 + 9x + 18 = 0$;
б) $x^2 + 3x + 2 = 0$; г) $z^2 + z - 6 = 0$; е) $x^2 - 7x + 6 = 0$.

Решите уравнение (№ 328–330):

328 а) $7x^2 + 9x + 2 = 0$; в) $2x^2 - 9x - 5 = 0$; д) $2x^2 - x - 6 = 0$;
б) $4x^2 - 5x + 3 = 0$; г) $4x^2 - 12x + 9 = 0$; е) $3x^2 + 7x + 5 = 0$.

329 а) $-x^2 - x + 20 = 0$; в) $-x^2 - 5x + 50 = 0$; д) $-2x^2 + 13x - 21 = 0$;
б) $-y^2 + 4y - 5 = 0$; г) $-x^2 + 18x - 81 = 0$; е) $-7x^2 - 5x - 2 = 0$.
Подсказка. В качестве образца используйте пример 2.

330 а) $x^2 + x + 0{,}25 = 0$; в) $0{,}1x^2 + 0{,}9x + 0{,}8 = 0$;
б) $x^2 - 1{,}4x + 0{,}49 = 0$; г) $0{,}3x^2 + 1{,}6x - 1{,}2 = 0$.
Подсказка. В качестве образца используйте пример 3.

331 Упростите уравнение, разделив или умножив обе его части на одно и то же число, и решите его.
а) $10x^2 + 30x + 20 = 0$; в) $1{,}5x^2 + 4x + 2{,}5 = 0$;
б) $-2x^2 - 10x - 8 = 0$; г) $-0{,}8x^2 + 0{,}4x + 2{,}4 = 0$.

332 Приведите уравнение к виду $ax^2 + bx + c = 0$ и решите его:
а) $3x^2 = 198 + 15x$; в) $8x^2 = 22x + 6$; д) $0{,}3x^2 + 1{,}4 = -1{,}3x$;
б) $11x = 3 + 10x^2$; г) $75 - 35x = 10x^2$; е) $0{,}1 + 0{,}03x^2 = 0{,}17x$.

333 Решите уравнение:
а) $x^2 - 2x - 1 = 0$; в) $x^2 - 2x - 4 = 0$; д) $x^2 - 6x + 6 = 0$;
б) $4x^2 - 8x - 1 = 0$; г) $2x^2 + 2x - 1 = 0$; е) $x^2 - 12x + 18 = 0$.

334 Найдите корни уравнения и укажите их приближённые значения с двумя знаками после запятой (воспользуйтесь калькулятором):
а) $x^2 - 6x = 1$; в) $x^2 + 11x = x - 2$; д) $2x^2 + 4x + 1 = 0$;
б) $3x^2 = 7x + 3$; г) $5x - 2 = 3x^2$; е) $4 - 4x = x^2$.

Неверно! Ученик решил на доске уравнение $x^2 + 4{,}8x - 1 = 0$ и записал ответ: $x_1 = -5$ и $x_2 = -0{,}2$. Какой корень уравнения он нашёл неверно? Объясните, в чём ошибка.

335 Решите уравнение:
а) $\sqrt{3}x^2 - 4x + \sqrt{3} = 0$;
б) $\sqrt{3}x^2 - 5x - \sqrt{12} = 0$;
в) $\sqrt{2}x^2 + 5x + \sqrt{18} = 0$;
г) $\sqrt{2}x^2 + 4x + \sqrt{2} = 0$.

ИССЛЕДУЕМ УРАВНЕНИЕ ПО ЕГО ДИСКРИМИНАНТУ

336 Вычислите дискриминант уравнения и ответьте на следующие вопросы: 1) Имеет ли уравнение корни? 2) Если имеет, то сколько? 3) Рациональными или иррациональными числами являются корни?
а) $4x^2 - 12x + 9 = 0$;
б) $2x^2 + 3x - 9 = 0$;
в) $5x^2 - x + 2 = 0$;
г) $x^2 + 7x - 1 = 0$;
д) $3x^2 + 2x - 2 = 0$;
е) $3x^2 - 11x + 10 = 0$;
ж) $25x^2 + 10x + 1 = 0$;
з) $x^2 + x + 1 = 0$;
и) $7x^2 + 7x + 1 = 0$.

337 Определите, существует ли такое значение b, при котором верно равенство (если существует, то найдите его):
а) $10b^2 + 4 = b^2 + 12b$;
б) $8b + 3 = b - 5b^2$;
в) $b^2 + 10b = b - 18$.

338 Подберите какое-нибудь значение c, при котором уравнение имеет корни, и значение c, при котором оно не имеет корней:
а) $x^2 - 3x + c = 0$;
б) $5x^2 - 2x + c = 0$;
в) $x^2 + 4x + c = 0$.

339 Определите, сколько корней имеет уравнение:
а) $(4x^2 + x + 1)(x^2 - 9x + 4) = 0$;
б) $(x^2 - 4x + 5)(2x^2 - 3x + 2) = 0$;
в) $(3x^2 - 5x + 2)(2x^2 + 3x - 1) = 0$;
г) $(36x^2 - 12x + 1)(5x^2 - 2x - 3) = 0$.

340 1) Проверьте, что уравнение $193x^2 + 93x + 10 = 0$ имеет корни. Используя этот факт, объясните, почему имеют корни следующие уравнения:
$193x^2 - 93x + 10 = 0$; $10x^2 + 93x + 193 = 0$; $10x^2 - 93x + 193 = 0$.

2) а) Имеет ли корни уравнение $48x^2 - 87x + 35 = 0$?
А уравнение $35x^2 + 87x + 48 = 0$?
б) Имеет ли корни уравнение $9x^2 + 13x + 5 = 0$?
А уравнение $5x^2 - 13x + 9 = 0$?

3) Запишите какое-нибудь квадратное уравнение, которое имеет корни в том и только в том случае, когда имеет корни уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ (все коэффициенты отличны от нуля).

341

ЗАДАЧА–ИССЛЕДОВАНИЕ

1) Дано уравнение $2x^2 - 7x + 3 = 0$. Запишите новое уравнение, поменяв местами в данном уравнении коэффициенты a и c. Решите оба уравнения. Как связаны между собой их корни?

2) Докажите, что если числа m и n — корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$, $c \neq 0$), то корнями уравнения $cx^2 + bx + a = 0$ являются числа $\frac{1}{m}$ и $\frac{1}{n}$.

Указание. Подставьте числа $\frac{1}{m}$ и $\frac{1}{n}$ в уравнение $cx^2 + bx + a = 0$ и воспользуйтесь условием, что числа m и n — корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

3) Составьте квадратное уравнение, корни которого обратны корням уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$. Проверьте себя, решив эти уравнения.

3.3 ВТОРАЯ ФОРМУЛА КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Что для решения квадратного уравнения с чётным вторым коэффициентом есть другая формула.

Квадратные уравнения, у которых второй коэффициент — чётное число, удобно решать по формуле корней, записанной в другом, более простом виде.

ВЫВОД ВТОРОЙ ФОРМУЛЫ КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим квадратное уравнение, которое имеет вид $ax^2 + 2kx + c = 0$, где k — целое число.

Найдём его дискриминант: $D = 4k^2 - 4ac = 4(k^2 - ac)$. Знак произведения $4(k^2 - ac)$ зависит от знака выражения $k^2 - ac$. Следовательно, вывод о числе корней уравнения можно сделать по знаку выражения $k^2 - ac$.

Будем называть выражение $k^2 - ac$ *сокращённым дискриминантом* и обозначим его символом D_1:

$$D_1 = k^2 - ac.$$

Если $D_1 > 0$, то по общей формуле корней квадратного уравнения получим

$$x = \frac{-2k \pm \sqrt{4D_1}}{2a} = \frac{-2k \pm 2\sqrt{D_1}}{2a} = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}.$$

Заменив k на $\frac{b}{2}$, получим следующую формулу:

$$x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{D_1}}{a}, \text{ где } D_1 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac.$$

Её называют *формулой корней квадратного уравнения с чётным вторым коэффициентом*.

Понятно, что если $D_1 < 0$, то уравнение корней не имеет.

Формула корней квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0$$

с чётным коэффициентом b

$$x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{D_1}}{a},$$

где $D_1 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac.$

РЕШЕНИЕ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пример 1. Решим уравнение $5x^2 - 8x + 3 = 0$.

$D_1 = (-4)^2 - 5 \cdot 3 = 16 - 15 = 1$; $D_1 > 0$;

$x = \frac{4 \pm \sqrt{1}}{5}$; $x = \frac{4 \pm 1}{5}$.

Ответ: 1; $\frac{3}{5}$.

При решении квадратного уравнения целесообразно выбирать ту формулу, которая в данном случае удобна. В то же время общая формула корней квадратного уравнения применима в любом случае.

Пример 2. Решите уравнение $x^2 + 4\sqrt{3}x + 11 = 0$.

Сравните решение 1, полученное по общей формуле, и решение 2, полученное по второй формуле.

Решение 1

$D = (4\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 11 =$
$= 16 \cdot 3 - 44 = 4,$

$x = \frac{-4\sqrt{3} \pm \sqrt{4}}{2}$; $x = -2\sqrt{3} \pm 1$.

Решение 2

$D_1 = (2\sqrt{3})^2 - 11 =$
$= 4 \cdot 3 - 11 = 1,$

$x = -2\sqrt{3} \pm 1$.

Ответ: $-2\sqrt{3} + 1$; $-2\sqrt{3} - 1$.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Решите уравнение
$$3x^2 + 4x - 4 = 0,$$
используя сначала общую формулу, а потом формулу корней квадратного уравнения с чётным вторым коэффициентом.

УПРАЖНЕНИЯ

РЕШАЕМ КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Решите уравнение, используя формулу корней квадратного уравнения с чётным вторым коэффициентом (№ 342–343):

342 а) $3x^2 + 10x - 8 = 0$; в) $2x^2 + 8x - 42 = 0$; д) $x^2 + 6x - 27 = 0$;
б) $36x^2 - 12x + 1 = 0$; г) $9x^2 - 6x - 24 = 0$; е) $3x^2 + 2x - 15 = 0$.

343 а) $5x^2 = 6x + 8$; в) $8x^2 = 5 - 16x - 8x^2$;
б) $3x^2 + 13x = 2x^2 - x - 49$; г) $-5x^2 + 20 = 14x - 4$.

344 Найдите значения переменной a, при которых:
а) значение выражения $a^2 - 4a - 10$ равно 50;
б) значение выражения $7a^2 - 28a + 30$ равно 9.

Решите уравнение (№ 345–346):

345 а) $x^2 - \frac{2}{3}x = \frac{8}{3}$; в) $x^2 + 1 = \frac{5x}{2}$; д) $5x^2 = \frac{1 - 5x}{10}$;
б) $\frac{x^2 + x}{2} = 15$; г) $\frac{7}{20} - \frac{1}{5}x = x^2$; е) $\frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{2}x = 3$.
Подсказка. Приведите уравнение к виду $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b и c — целые числа, и выберите удобную для вычисления формулу.

346 а) $x^2 - 2\sqrt{5}x + 5 = 0$; в) $x^2 + 2\sqrt{6}x - 18 = 0$;
б) $x^2 + 2\sqrt{7}x + 7 = 0$; г) $x^2 - 2\sqrt{2}x - 6 = 0$.
Подсказка. В качестве образца используйте пример 2.

347 1) Решим уравнение $x + \sqrt{x} - 6 = 0$. Это уравнение можно рассматривать как квадратное относительно $\sqrt{x}$, если записать его в виде $(\sqrt{x})^2 + \sqrt{x} - 6 = 0$. Введём замену $\sqrt{x} = y$. Получим уравнение $y^2 + y - 6 = 0$, корни которого 2 и -3. Так как равенство $\sqrt{x} = y$ означает выполнение двух условий: $y^2 = x$ и $y \geq 0$, то из двух корней выбираем неотрицательный: $y = 2$, и тогда $x = 4$.
Ответ: 4.
2) Решите уравнение: а) $x - 4\sqrt{x} + 3 = 0$; б) $x - 9\sqrt{x} + 20 = 0$; в) $x - \sqrt{x} + 3 = 0$.

348 1) Корни приведённого квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ можно найти по формуле $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$. Получите эту формулу из общей формулы корней квадратного уравнения, подставив $a = 1$, $b = p$, $c = q$.
2) Решите уравнение, используя полученную формулу:
а) $x^2 - 16x + 15 = 0$; б) $x^2 + 8x - 9 = 0$; в) $x^2 - 9x + 17 = 0$.

349 **ЗАДАЧА-ИССЛЕДОВАНИЕ**
1) Решите уравнения $5x^2 + 6x - 8 = 0$ и $5x^2 - 6x - 8 = 0$. Как связаны между собой их корни?
2) Докажите, что если квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет корни m и n, то корни уравнения $ax^2 - bx + c = 0$ — числа $-m$ и $-n$.
Указание. Подставьте числа $-m$ и $-n$ в уравнение $ax^2 - bx + c = 0$ и воспользуйтесь условием, что числа m и n — корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.
3) Составьте квадратное уравнение, корни которого противоположны корням уравнения $x^2 - 10x + 9 = 0$. Проверьте себя, решив эти уравнения.

3.4 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Почему для решения задачи недостаточно найти корни квадратного уравнения, составленного по условию задачи.
- Как исследовать полученные решения квадратного уравнения.

Вы уже знаете, что для решения задачи алгебраическим способом надо составить уравнение. Если уравнение квадратное, то в результате его решения могут получиться два корня. Но всегда ли они оба являются решением задачи? Об этом вы узнаете в данном пункте.

ИССЛЕДОВАНИЕ КОРНЕЙ УРАВНЕНИЯ

Пример 1. Решим задачу:

Из прямоугольного листа жести надо изготовить противень, вырезав по углам квадраты и загнув края вверх. Лист имеет размер 39 см × 24 см. Чему должна быть равна сторона вырезаемого квадрата, чтобы дно противня имело площадь 700 см^2?

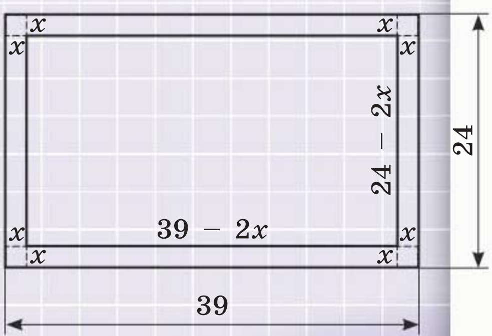


Рис. 3.1

Решение. Пусть x см — длина стороны квадрата, который надо вырезать. Тогда $(39 - 2x)$ см — длина дна противня, $(24 - 2x)$ см — ширина дна противня.

Сделаем по условию задачи схематический рисунок (***рис. 3.1***).

Составим уравнение:

$(39 - 2x)(24 - 2x) = 700.$

Приведём уравнение к виду $ax^2 + bx + c = 0$ и решим его:

$936 - 126x + 4x^2 = 700,$

$4x^2 - 126x + 236 = 0,$

$2x^2 - 63x + 118 = 0,$

$D = 3969 - 4 \cdot 2 \cdot 118 = 3025,$

$x = \frac{63 \pm 55}{4},$

$x_1 = 29{,}5, \ x_2 = 2.$

От листа жести, одна сторона которого 24 см, отрезать квадрат со стороной 29,5 см невозможно. Поэтому, хотя число 29,5 — корень уравнения, оно не является решением задачи.

Второй корень уравнения не противоречит условию задачи. В самом деле, если по углам листа вырезать квадраты со стороной 2 см, то размеры дна будут:

$$39 \text{ см} - 4 \text{ см} = 35 \text{ см},$$
$$24 \text{ см} - 4 \text{ см} = 20 \text{ см},$$

а его площадь будет равна

$$35 \text{ см} \cdot 20 \text{ см} = 700 \text{ см}^2.$$

Проведённое рассуждение типично для решения текстовой задачи. В задаче описывается некоторая жизненная ситуация, и составленное уравнение представляет собой ***математическую модель*** этой ситуации. Но эта модель не полностью отражает имеющиеся реальные условия.

Например, никак не учтено, что $0 < x < 12$. Поэтому, найдя корни уравнения, нам пришлось проверить их на соответствие условию задачи и отбросить тот, который ему не удовлетворяет.

При переводе текстовых задач на математический язык можно пытаться полностью учитывать все условия. Однако всё учесть не всегда возможно. Кроме того, модель может получиться такой сложной, что с ней трудно будет работать. Поэтому лучше составить простую модель и затем исследовать полученные решения на их соответствие реальным данным задачи.

Пример 2. Длины сторон ***египетского треугольника*** выражаются последовательными натуральными числами 3, 4 и 5. Существует ли ещё какой-нибудь прямоугольный треугольник, длины сторон которого также выражаются последовательными натуральными числами?

Решение. Пусть длины сторон прямоугольного треугольника выражаются числами n, $n + 1$, $n + 2$ (***рис. 3.2***).

По теореме Пифагора

$$n^2 + (n + 1)^2 = (n + 2)^2,$$
$$n^2 + n^2 + 2n + 1 = n^2 + 4n + 4,$$
$$n^2 - 2n - 3 = 0,$$

$n_1 = 3$, $n_2 = -1$.

Число -1 не удовлетворяет условию задачи, так как длина стороны не может выражаться отрицательным числом. Если $n = 3$, то $n + 1 = 4$, $n + 2 = 5$.

Таким образом, единственный прямоугольный треугольник с длинами сторон, выражающимися последовательными натуральными числами, — это египетский треугольник.

Ответ. Не существует.

Пример 3. Сигнальная ракета выпущена под углом 45° к горизонту с начальной скоростью 30 м/с (***рис. 3.3***). В этом случае высота h (в метрах), на которой находится ракета в определённый момент времени t (в секундах), может быть приближённо вычислена по формуле $h = 2 + 21t - 5t^2$.

Через сколько секунд ракета будет находиться на высоте 10 м?

Решение. Подставив в формулу $h = 2 + 21t - 5t^2$ вместо h число 10, получим уравнение $10 = 2 + 21t - 5t^2$.

Приведём уравнение к виду $at^2 + bt + c = 0$ и решим его:

$5t^2 - 21t + 8 = 0$,

$D = 441 - 160 = 281$,

$t = \frac{21 \pm \sqrt{281}}{10}$,

$t_1 \approx 0{,}4$, $t_2 \approx 3{,}8$.

Оба полученных корня уравнения являются решениями задачи. Ракета окажется на высоте 10 м дважды: первый раз при подъёме, примерно через 0,4 с, а второй при спуске, примерно через 3,8 с после запуска.

Ответ. Примерно через 0,4 с и через 3,8 с.

Треугольник с соотношением сторон 3:4:5 применялся египетскими землемерами для построения прямых углов с помощью верёвки, размеченной узлами.

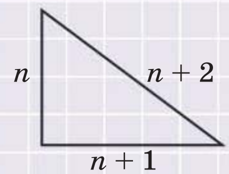
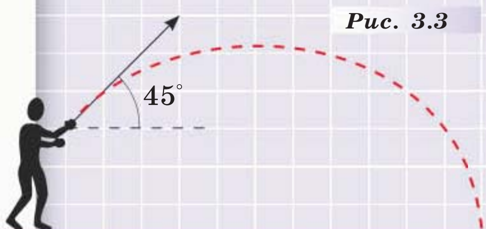


Рис. 3.2

Рис. 3.3



ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

Прочитайте задачу: «Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 29 см, а один его катет больше другого на 1 см. Найдите катеты треугольника».

Решите задачу по плану:

1) Введите неизвестное и составьте уравнение, используя теорему Пифагора.

2) Упростите составленное уравнение и решите его.

3) Исследуйте полученные решения, сделайте вывод и запишите ответ.

УПРАЖНЕНИЯ

РЕШАЕМ ЗАДАЧИ

Сделайте по условию задачи схематический рисунок и решите задачу (№ 350–355):

350 Садовый участок прямоугольной формы площадью 600 м^2 обнесён забором, длина которого 100 м. 1) Чему равны стороны участка? 2) Чему равны стороны участка такой же площади, если длина забора вокруг него составляет 140 м?

351 Кусок стекла имеет форму квадрата. Когда от него отрезали полосу шириной 20 см, его площадь стала равна 3500 см^2. Найдите первоначальные размеры куска стекла.

352 Две дороги пересекаются под прямым углом. От перекрёстка одновременно отъехали два велосипедиста, один в южном направлении, а другой в восточном. Скорость второго была на 4 км/ч больше скорости первого. Через час расстояние между ними оказалось равным 20 км. Определите скорость каждого велосипедиста.

353 Один катет прямоугольного треугольника на 7 см больше другого, а периметр треугольника равен 30 см. Найдите все стороны треугольника.

354 Из металлического листа, имеющего форму прямоугольника, длина которого в 1,5 раза больше ширины, сделан открытый сверху ящик. Для этого по углам листа вырезаны квадраты со стороной 3 дм и получившиеся боковые грани загнуты. Найдите размеры листа, если объём получившегося ящика оказался равным 216 дм^3.

355 Витрина магазина имеет размер 3 м × 4 м. При окраске здания на стекло по периметру витрины наклеили защитную бумажную ленту, чтобы не закрасить стекло. Лента закрыла площадь, равную половине площади витрины. Найдите ширину бумажной ленты.

356 а) Сумма квадратов двух последовательных натуральных нечётных чисел равна 130. Найдите эти числа.
б) Сумма квадратов двух последовательных целых чисел равна 41. Найдите эти числа.

357 Число диагоналей выпуклого n-угольника равно $\frac{n(n-3)}{2}$. Существует ли многоугольник, в котором 77 диагоналей? 25 диагоналей? Если существует, то укажите число его сторон.

358 Существует ли прямоугольный треугольник, стороны которого выражаются последовательными чётными числами? последовательными нечётными числами?

359 Сумму n последовательных натуральных чисел, начиная с 1, можно вычислить по формуле $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Определите, сколько натуральных чисел, начиная с 1, надо сложить, чтобы в сумме получилось 66. Какое наименьшее число последовательных натуральных чисел от 1 до n надо сложить, чтобы их сумма была больше 55?

360 К Новому году в семье Ивановых каждый приготовил подарок каждому из остальных членов семьи. Всего под ёлкой оказалось 30 подарков. Сколько человек в семье Ивановых?

361 В турнире шахматистов каждый из участников сыграл с каждым по одной партии, всего было сыграно 120 партий. Сколько шахматистов участвовало в турнире?

ИСПОЛЬЗУЕМ ФИЗИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

362 Если тело падает вниз и начальная скорость падения равна v м/с, то расстояние, которое оно пролетит за t с, вычисляется приближённо по формуле $h = vt + 5t^2$. Используя эту формулу, решите задачу (ответ округлите до десятых):
а) Камень брошен с 80-метровой башни с начальной скоростью 7 м/с. Через сколько секунд он упадёт на землю?
б) С самолёта, летящего на высоте 700 м, на льдину сброшен груз с начальной скоростью 30 м/с. Через сколько секунд груз достигнет льдины?

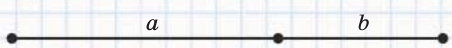
363 Если тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью v м/с, то высота, на которой оно окажется через t с, может быть приближённо найдена по формуле $h = vt - 5t^2$. Используя эту формулу, решите задачу:
Футболист на тренировке подбрасывает ногой мяч вертикально вверх. Если он подбросил мяч, сообщив ему начальную скорость 15 м/с, то через сколько секунд мяч окажется в 10 м над землёй?

364 Футболист на тренировке подбрасывает головой мяч вертикально вверх. Если он подбросит мяч, сообщив ему начальную скорость 10 м/с, то через сколько секунд мяч окажется в 6 м над землёй? (Рост футболиста считайте равным 200 см, ответ дайте приближённо с одним знаком после запятой.)

365

ЗАДАЧА-ИССЛЕДОВАНИЕ

Вам, вероятно, приходилось слышать о *золотом сечении*. Так называют число, выражающее определённое отношение длин отрезков. Оно может быть описано следующим образом: точка делит отрезок на две части в отношении, равном золотому сечению, если отношение большей части к меньшей равно отношению длины всего отрезка к длине большей части.



$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}.$$

Сооружения, построенные с использованием золотого сечения, поражают своей соразмерностью, законченностью, красотой.

1) Найдите число, выражающее золотое сечение. Для этого примите длину меньшей части за 1 и, подставив $b = 1$ в пропорцию, найдите a. Положительное значение a и будет равно золотому сечению. (Запишите его точное значение и приближённое значение с тремя знаками после запятой.)
2) Постройте какой-нибудь прямоугольник, отношение сторон которого равно золотому сечению. «Отрежьте» от него квадрат. Убедитесь в том, что отношение сторон полученного прямоугольника также равно золотому сечению. (В вычислениях используйте точное значение золотого сечения.)

3.5

РЕШЕНИЕ НЕПОЛНЫХ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Какие квадратные уравнения называют неполными.
- Как можно решать неполные квадратные уравнения не применяя формулы корней квадратного уравнения.

Любое квадратное уравнение можно решить, воспользовавшись формулой корней. Однако в ряде случаев можно использовать другие, более простые приёмы. Вы познакомитесь с приёмами, которыми следует пользоваться при решении так называемых неполных квадратных уравнений.

КАКОЕ УРАВНЕНИЕ НАЗЫВАЮТ НЕПОЛНЫМ КВАДРАТНЫМ УРАВНЕНИЕМ

! Квадратное уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$ называется неполным, если хотя бы один из коэффициентов b и c равен нулю.

Примеры неполных квадратных уравнений:
$25x^2 - 4x = 0$,
$7x^2 - 1 = 0$,
$0{,}6x^2 = 0$.

Иными словами, неполным квадратным уравнением называется квадратное уравнение вида

1) $ax^2 + bx = 0$, где $b \neq 0$,
2) $ax^2 + c = 0$, где $c \neq 0$,
3) $ax^2 = 0$.

Очевидно, что уравнение вида $ax^2 = 0$ имеет единственный корень, равный нулю. А для каждого уравнения другого вида имеется свой специальный приём решения.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ВИДА $ax^2 + bx = 0$ Квадратное уравнение вида $ax^2 + bx = 0$ решают путём разложения его левой части на множители. Начнём с примера.

Пример 1. Решим уравнение $10x^2 + 9x = 0$.

Вынесем за скобки в левой части уравнения переменную x. Тогда уравнение примет вид

$$x(10x + 9) = 0.$$

Равенство нулю произведения $x(10x + 9)$ означает, что $x = 0$ или $10x + 9 = 0$, т. е. $x = 0$ или $x = -0{,}9$.

Таким образом, уравнение $10x^2 + 9x = 0$ имеет два корня: $x_1 = 0$, $x_2 = -0{,}9$.

! Неполное квадратное уравнение вида $ax^2 + bx = 0$ имеет два корня, причём один из корней равен нулю.

Чтобы доказать это утверждение, решим уравнение $ax^2 + bx = 0$ в общем виде. Получим

$$x(ax + b) = 0,$$
$$x = 0 \text{ или } ax + b = 0,$$
$$x = 0 \text{ или } -\frac{b}{a}.$$

Таким образом, уравнение $ax^2 + bx = 0$ имеет два корня: 0 и $-\frac{b}{a}$.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ВИДА $ax^2 + c = 0$ Квадратное уравнение вида $ax^2 + c = 0$ решают путём приведения его к уравнению вида $x^2 = m$, где m — некоторое число, а такое уравнение мы уже рассматривали.

Пример 2. Решим уравнение $64x^2 - 49 = 0$.

Перенесём свободный член уравнения в правую часть и разделим обе части уравнения на коэффициент при x^2. Получим

$$64x^2 = 49,$$
$$x^2 = \frac{49}{64},$$
$$x = \sqrt{\frac{49}{64}} \text{ или } x = -\sqrt{\frac{49}{64}}, \text{ т. е.}$$
$$x_1 = \frac{7}{8},\ x_2 = -\frac{7}{8}.$$

Таким образом, уравнение имеет два противоположных корня: $\frac{7}{8}$ и $-\frac{7}{8}$.

Пример 3. Решим уравнение $16x^2 + 1 = 0$.

Если выполнить те же преобразования, что и в предыдущем примере, то получим уравнение

$$x^2 = -\frac{1}{16}.$$

Но квадрат числа не может быть отрицательным, поэтому уравнение корней не имеет.

Заметим, что прийти к выводу об отсутствии корней у этого уравнения можно было бы и без преобразований. В самом деле, выражение $16x^2$ при любом x неотрицательно (положительно или равно нулю), значит, сумма $16x^2 + 1$ всегда положительна, т. е. в нуль ни при каком значении x не обращается.

! Неполное квадратное уравнение вида $ax^2 + c = 0$ либо имеет два корня, которые являются противоположными числами, либо не имеет корней.

Для доказательства этого утверждения решим уравнение $ax^2 + c = 0$ в общем виде:

$$ax^2 + c = 0,$$
$$ax^2 = -c,$$
$$x^2 = -\frac{c}{a}.$$

1) Пусть числа a и c имеют разные знаки, тогда $\frac{c}{a} < 0$, а $-\frac{c}{a} > 0$. А значит, уравнение $x^2 = -\frac{c}{a}$ имеет корни $x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$ и $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

2) Если числа a и c имеют одинаковые знаки (т. е. они оба положительные или оба отрицательные), то левая часть уравнения $ax^2 + c = 0$ ни при каком значении x равняться нулю не может — при любом x она будет либо положительной, либо отрицательной. А значит, в этом случае уравнение корней не имеет.

Задача. Мальчик бросил мяч вертикально вверх с начальной скоростью 12 м/с. Через сколько секунд он поймал мяч?

Решение. Чтобы составить уравнение, воспользуемся формулой из задачи № 363.

$12t - 5t^2 = 0,$

$t(12 - 5t) = 0,$

$t_1 = 0,\ t_2 = 2{,}4.$

Ответ: через 2,4 с.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Какое квадратное уравнение называется неполным? Приведите примеры неполных квадратных уравнений.
- На примере решения уравнения $7x^2 - 28x = 0$ расскажите, как решают квадратное уравнение вида $ax^2 + bx = 0$. Сколько корней оно имеет?
- Решите уравнения: $9x^2 - 1 = 0$, $x^2 + 9 = 0$. Сколько корней может иметь квадратное уравнение вида $ax^2 + c = 0$?

УПРАЖНЕНИЯ

РЕШАЕМ УРАВНЕНИЯ

366 Найдите корни уравнения:
а) $x^2 - 5x = 0$; в) $2x - 3x^2 = 0$; д) $-x - x^2 = 0$; ж) $4x^2 = x$;
б) $x^2 + 3x = 0$; г) $5x + 2x^2 = 0$; е) $-2x^2 - 4x = 0$; з) $5x^2 = -x$.

367 Установите соответствие между уравнениями и утверждениями об их корнях:
1) $x^2 = 2$ а) не имеет корней;
2) $x^2 = 25$ б) имеет два рациональных корня;
3) $x^2 = -81$ в) имеет два иррациональных корня.

Решите уравнение (№ 368–369):

368 а) $x^2 - 16 = 0$; в) $y^2 + 100 = 0$; д) $16 - 4x^2 = 0$; ж) $3x^2 = 18$;
б) $z^2 - 25 = 0$; г) $3x^2 - 27 = 0$; е) $1 - 9y^2 = 0$; з) $-7x^2 = 28$.

369 а) $(x + 4)(x + 5) = 20$; в) $5(5 - 2x) = 2x(x - 5)$; д) $(x + 2)^2 = 4(4 + x)$;
б) $(x - 5)(x + 5) = 24$; г) $x(2x - 4) = 2(5 - 2x)$; е) $4(x - 1)^2 = (x + 2)^2$.

Преобразуйте уравнение в уравнение с целыми коэффициентами и решите его (№ 370–371):

370 а) $\frac{x^2}{3} = \frac{x}{6}$; б) $\frac{1}{10} = \frac{x^2}{100}$; в) $\frac{x^2 - 5}{25} = \frac{x - 1}{5}$; г) $\frac{x^2}{3} = \frac{1}{27}$.

371 а) $\frac{(x - 2)^2}{4} + \frac{(x + 1)^2}{2} = 2$; б) $\frac{(x - 3)^2}{3} + 3 = \frac{(x - 2)^2}{2}$; в) $(x - 2)^2 - \frac{(x - 3)^2}{3} = 1$.

Решите уравнение (№ 372–374):

372 а) $x^3 - x = 0$; в) $9x^3 - x = 0$; д) $-10x^2 + 2x^3 = 0$;
б) $x^3 + 4x^2 = 0$; г) $2x^2 + 4x^3 = 0$; е) $2x + 18x^3 = 0$.
Подсказка. Левую часть уравнения разложите на множители.

373 а) $(2x + 1)^2 = 2x + 1$; б) $(y - 2)^2 - 4 = 0$; в) $(3x - 1)^2 = 2(3x - 1)$.
Подсказка. Введите подходящую замену.

374 а) $(x^2 - 1)^3 + 2(x^2 - 1)^2 = 0$; в) $x^2(x^2 - 3)^2 - 4(x^2 - 3) = 0$;
б) $x^2(x - 1) - 3x(x - 1) = 0$; г) $x^2(x - 5)^2 - 5(x - 5)^2 = 0$.

375 Составьте неполное квадратное уравнение, имеющее корни:
а) 0 и 3; б) $-\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}$; в) -8 и 8; г) 0 и $\sqrt{2}$.

376 Решите неполное квадратное уравнение относительно x ($a \neq 0$):
а) $ax^2 + ax = 0$; б) $ax^2 - x = 0$.

Неверно! Опровергните с помощью контрпримера утверждение:
1) если $a > 0$, $c > 0$, то неполное квадратное уравнение $ax^2 + c = 0$ имеет решение;
2) если $a < 0$, $c > 0$, то неполное квадратное уравнение $ax^2 + c = 0$ не имеет решения.

377 1) Разберите способ решения уравнения $(39 - 2x)(24 - 2x) = 700$. Такое уравнение было составлено для решения задачи, рассмотренной в примере 1 пункта 3.4; его решение свелось к полному квадратному уравнению с большими коэффициентами. Однако его можно свести и к неполному квадратному уравнению. Сделаем это с помощью замены $y = 4 - 2x$. Действительно, эта замена приведёт к тому, что «уничтожится» число 700 — правая часть уравнения.
Введём замену:

$$(39 - 2x)(24 - 2x) = (35 + (4 - 2x))(20 + (4 - 2x)) = (35 + y)(20 + y).$$

Получаем $(35 + y)(20 + y) = 700$, отсюда $y^2 + 55y + 700 = 700$, т. е. $y^2 + 55y = 0$. Найдите y_1 и y_2 и продолжите решение уравнения.
2) Решите уравнение, используя замену, приводящую к неполному квадратному уравнению:
а) $(9 - 3x)(46 - 3x) = 120$; б) $(5x - 63)(5x - 18) = 550$.

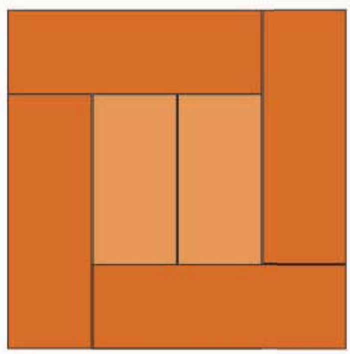
РЕШАЕМ ЗАДАЧИ

378 а) Произведение двух последовательных натуральных чисел больше меньшего из этих чисел на 25. Найдите эти числа.
б) Произведение двух последовательных натуральных чисел больше большего из этих чисел на 48. Найдите эти числа.

379 а) Катеты прямоугольного треугольника относятся как 5 : 12, а его гипотенуза равна 26 см. Найдите периметр треугольника.
б) Отношение гипотенузы прямоугольного треугольника к одному из катетов равно $\frac{17}{8}$, а другой катет равен 30 см. Найдите площадь треугольника.

380 На перекрёстке двух дорог встретились велосипедист и пешеход, а затем каждый продолжил свой путь: велосипедист — на север со скоростью 12 км/ч, а пешеход — на восток со скоростью 5 км/ч. Через какое время после их встречи велосипедист и пешеход окажутся на расстоянии 26 км друг от друга?

381 Секция паркета, площадь которого равна 400 см^2, состоит из шести прямоугольных пластин одинаковой ширины. Стороны большой пластины относятся как 1 : 3. Определите размеры большой и малой пластин.



382 Мяч отскочил от пола вертикально вверх с начальной скоростью 10 м/с. Через сколько секунд он снова коснется пола?
Подсказка. Воспользуйтесь формулой из задачи № 363.

383 а) Сумма квадратов двух последовательных натуральных чисел на 19 больше удвоенного меньшего из них. Найдите эти числа.
б) Сумма квадратов двух последовательных положительных чётных чисел на 72 больше удвоенной суммы этих чисел. Найдите эти числа.

384 Площадь кольца равна 36 см^2. Найдите радиусы внутреннего и внешнего кругов, образующих кольцо, если известно, что первый в 2 раза меньше второго (примите $\pi \approx 3$).

3.6 ТЕОРЕМА ВИЕТА

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Как связаны между собой корни квадратного уравнения и его коэффициенты.
- Какие приёмы позволяют получать информацию о корнях квадратного уравнения.

Между корнями и коэффициентами квадратного уравнения существует определённая взаимосвязь, о которой знали уже математики Древнего Вавилона и Древнего Египта. Но только в XVI в. её установил и сформулировал в виде теоремы Франсуа Виет.

ВЗАИМОСВЯЗЬ МЕЖДУ КОРНЯМИ И КОЭФФИЦИЕНТАМИ ПРИВЕДЁННОГО КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ Проведём небольшое исследование.

В таблице даны несколько приведённых квадратных уравнений. В каждом случае указаны их корни и вычислены их суммы и произведения:

Уравнение	Корни	Сумма корней	Произведение корней
$x^2 - 5x + 6 = 0$	2 и 3	5	6
$x^2 + 7x + 12 = 0$	−3 и −4	−7	12
$x^2 - 4x - 5 = 0$	−1 и 5	4	−5

Сравните сумму и произведение корней каждого уравнения с его коэффициентами. Вы увидите, что сумма корней противоположна коэффициенту при x, а произведение корней равно свободному члену. Этим свойством обладает любое приведённое квадратное уравнение, имеющее корни.

> **!** Сумма корней приведённого квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.

Это утверждение называется ***теоремой Виета***.

Доказательство. Приведённое квадратное уравнение исторически принято записывать так:

$$x^2 + px + q = 0.$$

Пусть это уравнение имеет два корня:

$$x_1 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2} \text{ и } x_2 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2}, \text{ где } D = p^2 - 4q.$$

Найдём их сумму и произведение:

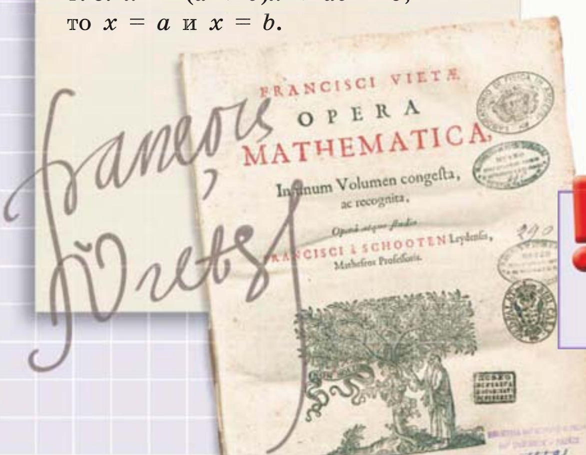
$$x_1 + x_2 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2} + \frac{-p - \sqrt{D}}{2} = \frac{-2p}{2} = -p;$$

$$x_1 x_2 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2} \cdot \frac{-p - \sqrt{D}}{2} = \frac{p^2 - D}{4} = \frac{p^2 - (p^2 - 4q)}{4} = q.$$

Таким образом, теорема доказана.

> **!** Равенства $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1 x_2 = q$, выражающие связь между корнями и коэффициентами приведённого квадратного уравнения, называют ***формулами Виета***.

Франсуа Виет (1540–1603) – французский математик, положивший начало алгебре как науке о преобразовании выражений и решении уравнений в общем виде.
Знаменитую теорему сам автор формулировал так:
«Если $B + D$, умноженное на A, минус A в квадрате равно BD, то A равно B и равно D».
Чтобы понять Виета, имейте в виду, что буква A означала у него неизвестное (наше x), буквы B и D – коэффициенты при неизвестном (наши a и b).
На языке современной алгебры вышеприведённая формулировка Виета означает:
если $(a + b)x - x^2 = ab$,
т. е. $x^2 - (a + b)x + ab = 0$,
то $x = a$ и $x = b$.



ФОРМУЛЫ ВИЕТА ДЛЯ НЕПРИВЕДЁННОГО КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ Используя теорему Виета, легко получить соответствующие формулы и для квадратного уравнения, не являющегося приведённым.

Пусть квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Разделив обе его части на a, получим приведённое квадратное уравнение

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,$$

имеющее те же корни.

> **!** По теореме Виета для уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ имеем $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ и $x_1x_2 = \frac{c}{a}$.

Формулы Виета позволяют, не решая уравнение, получить некоторую информацию о его корнях.

Рассмотрим, например, уравнение $2x^2 - 5x - 4 = 0$. Его дискриминант положителен, т. е. это уравнение имеет корни. По теореме Виета

$$x_1 + x_2 = \frac{5}{2};\ x_1x_2 = -\frac{4}{2} = -2.$$

Из этих равенств ясно, что корни уравнения имеют разные знаки и у положительного корня модуль больше.

Рассуждая таким образом, важно не ошибиться. Например, к квадратному уравнению $2x^2 - 5x - 4 = 0$ подобные рассуждения неприменимы, так как у этого уравнения отрицательный дискриминант и корней оно не имеет.

Соотношения между корнями и коэффициентами квадратного уравнения позволяют в некоторых случаях находить его корни устно, не прибегая к формуле корней.

Попробуем, например, подобрать корни квадратного уравнения $x^2 - 8x + 15 = 0$. Дискриминант уравнения положителен. Формулы Виета подсказывают решение: корнями должны быть числа, сумма которых равна 8 и произведение равно 15. Легко видеть, что этим условиям отвечают числа 5 и 3 ($5 + 3 = 8$ и $5 \cdot 3 = 15$).

Решение квадратного уравнения путём подбора его корней основано на следующей ***теореме, обратной теореме Виета***.

> **!** Если числа m и n таковы, что $m + n = -p$ и $mn = q$, то эти числа являются корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Доказательство. Выразив коэффициенты уравнения $x^2 + px + q = 0$ через m и n, получим уравнение $x^2 - (m + n)x + mn = 0$. Подставим в уравнение вместо x поочерёдно числа m и n:

$$m^2 - (m + n)m + mn = m^2 - m^2 - mn + mn = 0,$$
$$n^2 - (m + n)n + mn = n^2 - mn - n^2 + mn = 0.$$

Таким образом, эти числа — корни уравнения.

Франсуа Виет
1540–1603
Выдающийся французский математик.

Прежде чем применять теорему Виета, не забудьте проверить, что уравнение имеет корни.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Сформулируйте теорему Виета. Проверьте, имеет ли данное уравнение корни; если имеет, то запишите их сумму и произведение:
  а) $x^2 + 16x + 63 = 0$;
  б) $x^2 - 13x + 50 = 0$.
- Сформулируйте теорему, обратную теореме Виета. Найдите корни уравнения $x^2 + 7x - 18 = 0$, не прибегая к формуле корней.

УПРАЖНЕНИЯ

ПРИМЕНЯЕМ ТЕОРЕМУ ВИЕТА

385 Не решая уравнения, укажите, имеет ли оно корни и чему равны произведение и сумма его корней:
а) $x^2 - 14x + 40 = 0$; в) $2x^2 - 5x - 3 = 0$;
б) $x^2 + 16x + 15 = 0$; г) $3x^2 + 11x - 4 = 0$.

386 Все данные уравнения имеют корни. В каждом случае объясните, почему уравнение имеет корни разных знаков. Определите, модуль какого из корней больше — положительного или отрицательного:
а) $x^2 - 5x - 6 = 0$; в) $x^2 - 2x - 3 = 0$;
б) $x^2 + 4x - 21 = 0$; г) $x^2 + 2x - 3 = 0$.
Подсказка. В качестве образца воспользуйтесь примером из текста теории (с. 99).

387 Все данные уравнения имеют корни. В каждом случае объясните, почему уравнение имеет корни одинаковых знаков, и определите знаки корней:
а) $x^2 - 3x + 2 = 0$; в) $x^2 + 6x + 8 = 0$;
б) $x^2 - 5x + 4 = 0$; г) $x^2 + 8x + 7 = 0$.

388 Не применяя формулу корней, найдите второй корень уравнения, если известен первый:
а) $x^2 - 7x + 10 = 0$, $x_1 = 2$; в) $x^2 - 6x - 7 = 0$, $x_1 = 7$;
б) $x^2 + 8x + 15 = 0$, $x_1 = -3$; г) $x^2 + 3x - 18 = 0$, $x_1 = 3$.

389 Определите, имеет ли уравнение корни. Если имеет, то ответьте на следующие вопросы:
1) Сколько корней имеет уравнение? 2) Рациональными или иррациональными являются его корни? 3) Каковы знаки корней? 4) Если корни разных знаков, то какой из них имеет больший модуль?
а) $3x^2 + 7x + 2 = 0$; в) $-8x^2 - 2x + 3 = 0$; д) $-2x^2 + 4x - 3 = 0$;
б) $4x^2 - 11x - 3 = 0$; г) $-6x^2 + 11x - 3 = 0$; е) $2x^2 - 10x - 5 = 0$.

390 а) Один из корней уравнения $x^2 + px - 20 = 0$ равен -5. Определите другой корень и коэффициент p.
б) Один из корней уравнения $x^2 - 8x + q = 0$ равен -10. Определите другой корень и коэффициент q.

РЕШАЕМ КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ ПОДБОРОМ КОРНЕЙ

Решите уравнение (№ 391–393):

391 а) $x^2 + 9x + 20 = 0$; в) $x^2 + 12x + 20 = 0$; д) $x^2 + 12x + 32 = 0$;
б) $y^2 - 9y + 8 = 0$; г) $x^2 - 17x + 30 = 0$; е) $y^2 - 15y + 50 = 0$.

392 а) $x^2 - 3x - 10 = 0$; в) $y^2 + y - 56 = 0$; д) $y^2 + 5y - 50 = 0$;
б) $x^2 + 7x - 60 = 0$; г) $x^2 - x - 42 = 0$; е) $x^2 + x - 20 = 0$.

393 а) $y^2 - 11y + 18 = 0$; в) $y^2 + 7y - 18 = 0$; д) $y^2 + 13y + 12 = 0$;
б) $x^2 + 14x + 33 = 0$; г) $x^2 - 2x - 3 = 0$; е) $x^2 - 4x - 21 = 0$.

394 1) Уравнение $(3x - 7)(3x + 1) = 9$ с помощью замены $y = 3x - 7$ сводится к уравнению, которое легко решается устно с использованием формул Виета. Имеем
$(3x - 7)(3x + 1) = (3x - 7)((3x - 7) + 8) = y(y + 8)$. Получаем $y(y + 8) = 9$. Отсюда $y^2 + 8y - 9 = 0$, $y_1 = -9$, $y_2 = 1$. Продолжите решение данного уравнения.
2) Воспользовавшись рассмотренным приёмом, решите уравнение:
а) $(12 - 3x)(18 - 3x) = -5$; б) $(2x + 6)(5 - 2x) = 10$.

395 Найдите все целые значения p, при которых данное уравнение имеет целые корни:
а) $x^2 + px - 15 = 0$; б) $x^2 + px + 12 = 0$; в) $x^2 + px - 8 = 0$.
Образец. $x^2 + px + 15 = 0$. Найдём все пары целых чисел, произведение которых равно 15. Имеем $15 = 1 \cdot 15 = 3 \cdot 5 = (-1) \cdot (-15) = (-3) \cdot (-5)$.
Соответствующие значения p равны -16, -8, 8 и 16.

396 Найдите все целые положительные значения q, при которых данное уравнение имеет целые корни: а) $x^2 + 5x + q = 0$; б) $x^2 - 6x + q = 0$.
Найдите несколько целых отрицательных значений q, при которых указанные уравнения имеют целые корни. Можно ли перечислить все такие значения q?

СОСТАВЛЯЕМ КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ

397 Для составления квадратного уравнения, имеющего корни 8 и 7, можно применить два способа:
1) составить произведение $(x - 8)(x - 7) = 0$, откуда получаем уравнение $x^2 - 15x + 56 = 0$;
2) использовать формулы Виета: $x^2 - (8 + 7)x + 8 \cdot 7 = 0$, откуда получаем то же уравнение $x^2 - 15x + 56 = 0$.
Составьте двумя способами квадратное уравнение, имеющее корни:
а) 11 и 4; б) -4 и -5; в) -10 и 2; г) -1 и 15.

398 Составьте квадратное уравнение, корни которого:
а) на 2 меньше корней уравнения $x^2 - 187x + 148 = 0$;
б) на 3 больше корней уравнения $x^2 + 191x - 1250 = 0$.
Образец. а) Пусть y_1 и y_2 — корни уравнения, которое надо составить. Тогда $y_1 = x_1 - 2$, $y_2 = x_2 - 2$; $y_1 + y_2 = (x_1 + x_2) - 4$,
$y_1 \cdot y_2 = (x_1 - 2)(x_2 - 2) = x_1 \cdot x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4$. Доведите решение до конца.

399 Составьте квадратное уравнение, если известно, что:
а) $x_1x_2 = 12$, $x_1^2 + x_2^2 = 40$; б) $x_1x_2 = -3$, $x_1^2 + x_2^2 = 10$.
Указание. Найдите сумму корней уравнения, воспользовавшись формулой квадрата суммы двух чисел.

400

ЗАДАЧА-ИССЛЕДОВАНИЕ

1) Докажите, что если сумма коэффициентов квадратного уравнения
$$ax^2 + bx + c = 0$$
равна нулю, то одним из корней этого уравнения является число 1.
2) Составьте какое-нибудь квадратное уравнение, имеющее корень, равный 1, и найдите второй корень этого уравнения.
3) Найдите устно корни уравнения:
а) $x^2 - 1999x + 1998 = 0$; б) $8x^2 - 5x - 3 = 0$; в) $100x^2 - 150x + 50 = 0$.

3.7 РАЗЛОЖЕНИЕ КВАДРАТНОГО ТРЁХЧЛЕНА НА МНОЖИТЕЛИ

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Многочлен какого вида называют квадратным трёхчленом.
- Формулу для разложения на множители квадратного трёхчлена.

Вам уже известны некоторые приёмы представления многочлена в виде произведения двух или нескольких многочленов. В этом пункте вы познакомитесь ещё с одним приёмом разложения многочлена на множители, овладеть которым позволит умение решать квадратные уравнения.

КВАДРАТНЫЙ ТРЁХЧЛЕН Многочлен вида $ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, называют *квадратным трёхчленом*.

Так, например, многочлены $10x^2 - 3x + 6$ и $-x^2 + \sqrt{2}x - 12$ являются квадратными трёхчленами. Заметим, что квадратный трёхчлен необязательно должен состоять из трёх слагаемых. Такой многочлен, как, например, $10x^2 - 25$, тоже является квадратным трёхчленом, просто его второй коэффициент равен 0.

Обратите внимание: в левой части квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ записан квадратный трёхчлен. Корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ называют также *корнями квадратного трёхчлена* $ax^2 + bx + c$. Иными словами, корни квадратного трёхчлена — это значения переменной, при которых квадратный трёхчлен обращается в нуль. Понятно, что квадратный трёхчлен, как и квадратное уравнение, может иметь два корня, один корень или не иметь корней. И зависит это от выражения $D = b^2 - 4ac$, которое называют также *дискриминантом квадратного трёхчлена*.

Квадратный трёхчлен $3x^2 - 7x + 2$, его коэффициенты: 3, -7 и 2, дискриминант: $D = (-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 25$, корни: $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{3}$.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КВАДРАТНОГО ТРЁХЧЛЕНА Квадратный трёхчлен, имеющий корни, можно разложить на множители.

Возьмём трёхчлен $x^2 - 5x + 6$. Чтобы разложить его на множители, применим способ группировки, причём формулы Виета подскажут нам, какую группировку использовать. Корни этого трёхчлена — числа 2 и 3. Выразив коэффициенты трёхчлена через корни, получим

$$x^2 - 5x + 6 = x^2 - (2 + 3)x + 2 \cdot 3 = x^2 - 2x - 3x + 2 \cdot 3 = x(x - 2) - 3(x - 2) = (x - 2)(x - 3).$$

Разложим теперь на множители трёхчлен $2x^2 - 10x + 12$. Понятно, что он имеет те же корни, что и трёхчлен $x^2 - 5x + 6$ (объясните почему). Сначала вынесем за скобки коэффициент при x^2, получим

$$2x^2 - 10x + 12 = 2(x^2 - 5x + 6) = 2(x - 2)(x - 3).$$

Точно так же обстоит дело в общем случае.

Чтобы выяснить, раскладывается ли квадратный трёхчлен на множители, достаточно вычислить его дискриминант.

! Если x_1 и x_2 — корни квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Проще всего провести доказательство так: выполнить умножение в правой части этого равенства и убедиться в том, что при этом получается левая часть. Будем иметь

$$a(x - x_1)(x - x_2) = a(x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2) =$$
$$= a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2) = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) =$$
$$= ax^2 + bx + c.$$

В ходе доказательства, воспользовавшись теоремой Виета, мы выполнили подстановку:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ и } x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

Итак,

> если квадратный трёхчлен имеет корни, то он раскладывается на линейные множители.

Верно и обратное утверждение: если квадратный трёхчлен раскладывается на линейные множители, то он имеет корни. В самом деле, если $ax^2 + bx + c = (kx + l)(mx + n)$, то, например, число $-\frac{n}{m}$ — корень трёхчлена $ax^2 + bx + c$. Это обратное утверждение можно сформулировать по-другому:

> если квадратный трёхчлен не имеет корней, то его нельзя разложить на линейные множители.

Пример. Разложим на множители трёхчлен

$$-3x^2 - 5x + 2.$$

Решив уравнение $-3x^2 - 5x + 2 = 0$, найдём, что корни трёхчлена — числа $\frac{1}{3}$ и -2. Воспользовавшись формулой, получим

$$-3x^2 - 5x + 2 = (-3)\left(x - \frac{1}{3}\right)(x + 2).$$

Разложение на множители будет более красивым, если перемножить число -3 и двучлен $x - \frac{1}{3}$. Тогда трёхчлен $-3x^2 - 5x + 2$ будет записан в виде произведения двух линейных многочленов:

$$-3x^2 - 5x + 2 = (1 - 3x)(x + 2).$$

Формула разложения квадратного трёхчлена на множители справедлива и в том случае, если его дискриминант равен 0. При этом говорят, что трёхчлен имеет *два равных корня*.

Таким образом, если дан квадратный трёхчлен, то, вычислив его дискриминант, вы можете выяснить, раскладывается ли этот трёхчлен на линейные множители или нет. А для разложения трёхчлена на множители вы теперь можете пользоваться простым способом, не требующим какой-либо догадки, как это было при использовании способа группировки.

Сократим дробь:

$$\frac{x^2 + 3x - 10}{2x^2 - 4x} = \frac{(x + 5)(x - 2)}{2x(x - 2)} = \frac{x + 5}{2x}.$$

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Назовите коэффициенты квадратного трёхчлена: а) $x^2 - 15x + 50$; б) $-0{,}4x^2 + 1{,}6$.
- Сколько корней может иметь квадратный трёхчлен? Имеет ли корни квадратный трёхчлен $x^2 + 7x - 18$?
- Запишите формулу разложения на множители квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$, имеющего корни. Разложите на множители трёхчлен $5x^2 + 3x - 2$.

УПРАЖНЕНИЯ

КВАДРАТНЫЙ ТРЁХЧЛЕН

401 Укажите, какие из данных многочленов являются квадратным трёхчленом:
1) $2x^2 + 7x + 6$; 3) $10x + 2$; 5) $1 - 6x + 9x^2$;
2) $2 - 3x^2$; 4) $4x^2 - 3x$; 6) $5x^3 + 2x$.
Для каждого квадратного трёхчлена назовите его коэффициенты.

402 Какие из чисел -1, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ и 1 являются корнями квадратного трёхчлена $4x^2 - 6x + 2$?

403 Определите, имеет ли квадратный трёхчлен корни, и если имеет, то найдите их:
а) $x^2 - 15x + 50$; б) $6x^2 + 9x + 4$; в) $3x^2 - 2x - 1$; г) $x^2 + 14x + 48$.

РАЗЛОЖЕНИЕ КВАДРАТНОГО ТРЁХЧЛЕНА НА МНОЖИТЕЛИ

404 Определите, можно ли разложить на линейные множители квадратный трёхчлен:
а) $x^2 - 12x + 32$; б) $3x^2 + 8x + 10$; в) $2x^2 + 3x + 1$; г) $x^2 - 5x + 8$.

Разложите на множители (№ 405–407):

405 а) $m^2 + 3m - 18$; б) $b^2 + 9b + 8$; в) $a^2 + a - 6$; г) $n^2 - 4n - 60$.

406 а) $21 + 10n + n^2$; б) $14 - 9k + k^2$; в) $42 - 13b + b^2$; г) $48 - 14c + c^2$.

407 а) $2x^2 + 3x + 1$; б) $-4z^2 + 11z + 3$; в) $3 - 11m + 6m^2$; г) $2 + 9n + 7n^2$.

408 Покажите, что квадратные трёхчлены
$x^2 + 2x - 3$, $2x^2 + 4x - 6$ и $-5x^2 - 10x + 15$
имеют одни и те же корни. Разложите эти квадратные трёхчлены на множители.

409 Сократите дробь:
а) $\frac{x^2 + 6x + 5}{x^2 + 5x}$; в) $\frac{y^2 - 7y + 12}{2y^2 - 8y}$; д) $\frac{m^2 - 2m - 8}{m^2 + 4m + 4}$;
б) $\frac{a^2 - 9}{a^2 + 8a + 15}$; г) $\frac{b^2 - 25}{b^2 - 8b + 15}$; е) $\frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 5n + 4}$.

410 Представьте в виде произведения двух линейных множителей с целыми коэффициентами:
а) $6x^2 + 25x + 14$; в) $-12z^2 - 11z + 15$; д) $-6a^2 + a + 12$;
б) $18y^2 - 19y - 12$; г) $8m^2 - 27m - 20$; е) $24b^2 + 5b - 36$.

Неверно! Каждая из трёх девочек записала на доске свой вариант разложения на линейные множители квадратного трёхчлена

$$3x^2 - 4x - 4.$$

Зоя: $\left(x + \frac{2}{3}\right)(x - 2)$; Ира: $3\left(x + \frac{2}{3}\right)(x - 2)$; Оля: $3\left(x - \frac{2}{3}\right)(x + 2)$.

Кто из девочек ошибся? Объясни, в чём ошибка.

411 Сократите дробь:

а) $\dfrac{x^3 + 1}{3x^2 + 2x - 1}$; в) $\dfrac{1 - x^2}{5x^2 - 4x - 1}$; д) $\dfrac{5 + 3x - 2x^2}{1 - x - 2x^2}$;

б) $\dfrac{x^3 - 1}{2x^2 + x - 3}$; г) $\dfrac{2x^2 - 7x + 3}{x - 2x^2}$; е) $\dfrac{3x^2 - 4x - 4}{6 - x - x^2}$.

412 Найдите все целые значения m, при которых квадратный трёхчлен можно разложить на линейные двучлены с целыми коэффициентами:

а) $c^2 + mc + 10$; б) $z^2 + mz + 3$; в) $x^2 + mx - 21$; г) $y^2 + my - 12$.

413 Найдите значение k, при котором разложение на множители трёхчлена:

а) $2x^2 + 5x + k$ содержит множитель $(x + 3)$;

б) $3x^2 - 8x + k$ содержит множитель $(x - 2)$;

в) $-4x^2 + kx + 1$ содержит множитель $(x - 1)$;

г) $2x^2 - 5x + k$ содержит множитель $(2x + 3)$;

д) $4x^2 - 8x + k$ содержит множитель $(2x - 1)$.

ПРИМЕНЯЕМ РАЗЛОЖЕНИЕ КВАДРАТНОГО ТРЁХЧЛЕНА НА МНОЖИТЕЛИ

414 Разложите на множители:

а) $x^3 + 3x^2 + 2x$; б) $x^3 - 7x^2 + 10x$; в) $x^3 - 12x^2 + 32x$; г) $x^4 + x^3 - 6x^2$.

415 Составьте какое-нибудь уравнение, имеющее корни:

а) 2; −8; в) 0; 10; 12; д) 1; 2; −3;

б) 0; −1; 5; г) 1; 2; −2; е) 0; 1; 2; 3.

Разложите на множители (№ 416–419):

416 а) $x^2(x - 5) - x(x - 5) - 42(x - 5)$;

б) $y^2(y + 3) + 9y(y + 3) + 20(y + 3)$;

в) $2b^2(1 - b^2) - 5b(1 - b^2) - 3(1 - b^2)$;

г) $3a^2(a^2 - 4) + 2a(a^2 - 4) - a^2 + 4$.

417 а) $x^4 - 5x^2 + 4$; б) $x^4 - 13x^2 + 36$; в) $4x^4 - 32x^2$; г) $3x^4 - 75$.

418 а) $(x + y)^2 - 3(x + y) - 10$; г) $(a - 2)^2 + 4(a - 2) - 21$;

б) $(a + b)^2 - 5(a + b) - 84$; д) $(3 - y)^2 - 2(3 - y) - 35$;

в) $(m + n)^2 + 3(m + n) + 2$; е) $(1 - x)^2 - 6(1 - x) + 8$.

419 а) $m^2 - 11mn + 28n^2$; г) $b^2 + 6bc - 55c^2$;

б) $a^2 - 16ab - 36b^2$; д) $n^2 + 14an + 24a^2$;

в) $x^2 + 21xy + 20y^2$; е) $a^2 - 9ac - 36c^2$.

Подсказка. а) Решите уравнение $m^2 - 11mn + 28n^2 = 0$ относительно m; сделайте это устно, пользуясь формулами Виета.

420 Сократите дробь:

а) $\dfrac{x^2 + 4ax + 3a^2}{x^2 - 9a^2}$; б) $\dfrac{x^2 - 11ax + 28a^2}{x^3 - 64a^3}$.

УЗНАЙТЕ БОЛЬШЕ

ЦЕЛЫЕ КОРНИ УРАВНЕНИЯ С ЦЕЛЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Вам уже приходилось находить корни квадратного уравнения без использования общей формулы корней, непосредственным подбором. Познакомимся ещё с одним приёмом бесформульного решения квадратного уравнения, с помощью которого можно отыскать его целый корень (если, конечно, такой есть). При этом мы будем рассматривать только уравнения с целыми коэффициентами.

Возьмём уравнение $5x^2 - 14x - 3 = 0$. Предположим, что целое число m — корень этого уравнения, т. е. $5m^2 - 14m - 3 = 0$. Это равенство можно переписать так: $m(5m - 4) = 3$. Число, записанное слева, делится на m, поэтому и равное ему число 3 также делится на m. Мы пришли к выводу: если уравнение имеет целый корень, то он является делителем свободного члена.

Теперь понятно, как этот целый корень можно отыскать: нужно выписать все делители свободного члена и затем подстановкой проверить, является ли какое-нибудь из этих чисел корнем уравнения. Всего имеем четыре делителя: 1, –1, 3 и –3. Подставляя их в уравнение, получим

$$5 \cdot 1^2 - 14 \cdot 1 - 3 \neq 0,$$
$$5 \cdot (-1)^2 - 14 \cdot (-1) - 3 \neq 0,$$
$$5 \cdot 3^2 - 14 \cdot 3 - 3 = 0.$$

Итак, число $x_1 = 3$ — корень уравнения. Второй корень можно найти, воспользовавшись, например, соотношением $x_1x_2 = -\frac{3}{5}$. Подставив вместо x_1 число 3, получим

$$3x_2 = -\frac{3}{5},\ x_2 = -\frac{1}{5}.$$

У вас может возникнуть естественный вопрос: «Зачем нужен такой приём, когда любое квадратное уравнение можно решать по формуле корней?»

Оказывается, в некоторых случаях такой способ отыскания корней может быть очень полезен. Возьмём, например, уравнение $183x^2 - 184x + 1 = 0$. Если решать его по формуле, то придётся выполнять громоздкие вычисления. В то же время с помощью рассмотренного приёма легко обнаружить, что один из его корней равен 1. (Найдите самостоятельно другой корень.)

Существенным также является то, что этот приём носит общий характер. Его можно использовать для нахождения целых корней не только квадратных уравнений, но и уравнений более высоких степеней, например уравнений третьей степени (или кубических) $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, где $a \neq 0$; четвёртой степени $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, где $a \neq 0$. Для таких уравнений формулы корней хотя и существуют, но настолько сложны, что в явном виде их даже не выписывают. А уже для уравнения пятой степени формулы корней вообще не существует.

Поэтому для решения уравнений третьей и четвёртой степени мы пользовались ***специальными приёмами*** — разложением на множители многочлена в левой части, понижением степени уравнения с помощью подстановки. А теперь ещё будем использовать приём отыскания целого корня, который основан на следующем утверждении:

> **!** всякий целый корень уравнения с целыми коэффициентами является делителем его свободного члена.

Пример 1. Найдём целые корни уравнения $2x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$.

Выпишем делители свободного члена: 1, −1, 2 и −2. Подставим их в уравнение:

$$2\cdot 1^3 + 1^2 - 5\cdot 1 + 2 = 0, \qquad 2\cdot(-1)^3 + (-1)^2 - 5\cdot(-1) + 2 \neq 0,$$
$$2\cdot 2^3 + 2^2 - 5\cdot 2 + 2 \neq 0, \qquad 2\cdot(-2)^3 + (-2)^2 - 5\cdot(-2) + 2 = 0.$$

Таким образом, уравнение имеет два целых корня: 1 и −2.

Если найден какой-нибудь целый корень уравнения, то его левую часть можно разложить на множители, один из которых есть разность между переменной и этим корнем. А это часто даёт возможность найти и другие корни уравнения или установить, что их нет.

Пример 2. Рассмотрим уравнение $6x^3 - 11x^2 + 6x - 1 = 0$.

Легко найти его целый корень, равный 1 (сделайте это самостоятельно). Разложим левую часть уравнения на множители, одним из которых будет разность $(x - 1)$. Для этого воспользуемся способом группировки.

Чтобы у нас появился одночлен, который можно будет объединить в группу со старшим членом $6x^3$, отнимем от левой части уравнения одночлен $6x^2$ и прибавим его:

$$\underbrace{6x^3 - 6x^2} + 6x^2 - 11x^2 + 6x - 1 = 0; \qquad 6x^2(x - 1) - 5x^2 + 6x - 1 = 0.$$

Теперь прибавим и вычтем $5x$:

$$6x^2(x - 1) - \underbrace{5x^2 + 5x} - 5x + 6x - 1 = 0; \qquad 6x^2(x - 1) - 5x(x - 1) + (x - 1) = 0.$$

Вынесем за скобку двучлен $(x - 1)$, тогда уравнение примет вид

$$(x - 1)(6x^2 - 5x + 1) = 0.$$

Теперь можно выяснить, имеет ли данное уравнение другие корни. Для этого достаточно решить квадратное уравнение $6x^2 - 5x + 1 = 0$. Получим $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{3}$.

Значит, уравнение $6x^3 - 11x^2 + 6x - 1 = 0$ имеет три корня: 1, $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$.

1 Найдите корни квадратного уравнения, не пользуясь формулой корней:

а) $2x^2 - 3x + 1 = 0$;   в) $3x^2 - 10x - 8 = 0$;

б) $4x^2 + 7x + 3 = 0$;   г) $3x^2 + 5x - 2 = 0$.

Указание. Сначала найдите целый корень уравнения.

2 Найдите целые корни уравнения, если они есть:

а) $x^3 + 5x^2 - 17x - 21 = 0$;   в) $3x^4 - 2x^2 + 3 = 0$;

б) $2x^3 - 5x^2 - 22x - 15 = 0$;   г) $x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12 = 0$.

3 Решите уравнение:

а) $x^4 + 2x^3 - x - 2 = 0$;   в) $2x^3 - 7x^2 + 9 = 0$;

б) $x^3 - 12x^2 + 9x + 22 = 0$;   г) $5x^3 - 54x^2 + 39x + 10 = 0$.

4 Разложите на множители многочлен:

а) $x^4 - 2x^3 + 2x - 1$;   в) $4x^3 + 21x^2 - 25$;

б) $x^4 + x^3 - 7x^2 - 13x - 6$;   г) $5x^3 + 3x^2 - 5x - 3$.

5 Определите степень уравнения $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$.
Выведите формулы Виета для этого уравнения.

ПОДВЕДЁМ ИТОГИ

Квадратным уравнением называется уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b и c — произвольные числа, причём $a \neq 0$.
$D = b^2 - 4ac$ — дискриминант квадратного уравнения.

1) Если $D > 0$, то уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два корня: x_1 и x_2.

Формула корней квадратного уравнения

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \text{ где } D = b^2 - 4ac.$$

2) Если $D = 0$, то уравнение имеет один корень.

3) Если $D < 0$, то уравнение корней не имеет.

Квадратное уравнение называется *неполным*, если хотя бы один из коэффициентов b и c равен нулю:

4) $ax^2 + bx = 0$, где $b \neq 0$ (имеет два корня: 0 и $-\frac{b}{a}$);

5) $ax^2 + c = 0$, где $c \neq 0$ (либо имеет два корня, которые являются противоположными числами, либо не имеет корней);
$ax^2 = 0$ (имеет единственный корень $x = 0$).

Решим уравнения:

1) $x^2 - 12x + 20 = 0$,
$D = 12^2 - 4 \cdot 1 \cdot 20 = 64$,
$x = \frac{12 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 1} = \frac{12 \pm 8}{2}$,
$x_1 = 10$, $x_2 = 2$.

2) $25x^2 - 20x + 4 = 0$,
$D = 20^2 - 4 \cdot 25 \cdot 4 = 0$,
$x = 0{,}4$.

3) $2x^2 + 3x + 4 = 0$,
$D = 9 - 4 \cdot 2 \cdot 4 < 0$,
корней нет.

4) $5x^2 + 3x = 0$,
$x(5x + 3) = 0$,
$x_1 = 0$, $x_2 = -0{,}6$.

5) $9x^2 - 4 = 0$,
$9x^2 = 4$,
$x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = -\frac{2}{3}$.

Решите уравнение (№ 1–3):

1 а) $3x^2 + 5x - 2 = 0$; в) $4x^2 - 12x + 9 = 0$;
б) $x^2 - 2x - 1 = 0$; г) $3x^2 + 5x + 3 = 0$.

2 а) $x^2 = 2x + 4$; б) $(x - 1)(2x + 3) = -2$; в) $\frac{x^2 + 7}{2} = 4x$.

3 а) $2x^2 - 18 = 0$; б) $25x^2 - 2 = 0$; в) $4x^2 + 1 = 0$; г) $9x^2 = 0$.

4 Решите задачу: «Вокруг участка прямоугольной формы сооружена изгородь, длина которой 30 м. Определите размеры участка, если его площадь равна 50 м^2».

Формулами Виета называют равенства $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1 x_2 = q$, выражающие связь между корнями и коэффициентами квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Для уравнения
$x^2 + 4x - 21 = 0$
$D = 10 > 0$,
$x_1 + x_2 = -4$ и $x_1 x_2 = -21$.

5 Укажите, если возможно, чему равны произведение и сумма корней уравнения:
а) $x^2 - 7x + 12 = 0$; б) $x^2 - 4x + 7 = 0$; в) $x^2 - 2x - 35 = 0$.

Квадратным трёхчленом называют многочлен вида $ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$.
Если x_1 и x_2 — корни квадратного трёхчлена, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Квадратный трёхчлен
$2x^2 - 5x + 3$
имеет корни 1,5 и 1;
$2x^2 - 5x + 3 =$
$= 2(x - 1{,}5)(x - 1)$.

6 Разложите, если возможно, на множители квадратный трёхчлен:
а) $x^2 + 6x - 7$; б) $4x^2 - 9x + 2$; в) $3x^2 - 2x + 1$.

ГЛАВА 4

СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

- УРАВНЕНИЕ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ И ЕГО ГРАФИК
- ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ И ЕГО ГРАФИК
- УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ ВИДА $y = kx + l$
- СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ СПОСОБОМ СЛОЖЕНИЯ
- РЕШЕНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ СПОСОБОМ ПОДСТАНОВКИ
- РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ
- ЗАДАЧИ НА КООРДИНАТНОЙ ПЛОСКОСТИ

Узнайте больше

- ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ НЕРАВЕНСТВ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

ТУРНИР ГОРОДОВ

Это ещё одна форма международных математических состязаний по математике, которые проводят по инициативе легендарного популяризатора математического образования Николая Константинова. В Турнире городов два тура — осенний и весенний, его задания рассчитаны на учеников 8–11 классов. Особенность турнира в том, что он ориентирует участников на углублённую работу над задачей, развивая качества, необходимые в исследовательской работе.

Турнир городов проводится ежегодно с 1980 года и состоит из двух вариантов — базового и сложного. Сложный вариант сопоставим по трудности со Всероссийской и Международной математическими олимпиадами, а базовый, конечно, несколько проще. Каждый вариант проводится отдельно для двух возрастов: младших (8–9 классы) и старших (10–11 классы). Любой школьник может участвовать в турнире для своего класса или старше.

Турнир проводится силами местных организационных комитетов более чем в ста городах, расположенных в более чем двадцати государствах Европы, Азии, Южной и Северной Америки, Австралии и Новой Зеландии. Принять участие может любой населённый пункт.

Авторы лучших работ в 9–10 классах приглашаются на Летнюю математическую конференцию Турнира городов. Непременным её участником является самовар, ставший по этой причине символом международного математического Турнира городов.

4.1 УРАВНЕНИЕ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ И ЕГО ГРАФИК

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Что уравнение может содержать две или более переменные.
- Какое понятие является для уравнения с двумя переменными аналогом понятия «корень уравнения с одной переменной».
- Как уравнение с двумя переменными интерпретируют графически.

До сих пор вам приходилось решать уравнения с одной переменной. Но задачи, как правило, содержат две или даже больше неизвестные величины. И в таких случаях для перевода задачи на математический язык удобно использовать не одну, а две или несколько букв. При этом возникает уравнение с несколькими переменными. В этой главе будут рассматриваться уравнения с двумя переменными. Такие уравнения можно интерпретировать графически. А значит, снова встретятся алгебра и геометрия, формулы и графики.

РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ Пусть требуется найти два числа, сумма которых равна их произведению. Обозначим одно из чисел буквой x, а другое — буквой y. Тогда условие задачи можно записать в виде равенства $x + y = xy$. Такое равенство называют **уравнением с двумя переменными.**

Уравнение с двумя переменными не обязательно должно возникать вследствие перевода на математический язык условия некоторой задачи. Любое равенство, содержащее две переменные, например, $2x - 3y = 5$, $y = x^2$, $x^2 + y^2 = 1$, $(x - 1)(y + 6) = 0$, можно рассматривать как уравнение с двумя переменными.

Для уравнения с одной переменной главным был вопрос о его корнях. Имея дело с уравнением с двумя переменными, мы будем говорить о парах чисел — **решениях уравнения.**

> **!** Решением уравнения с двумя переменными называется пара значений переменных, которая обращает это уравнение в верное числовое равенство.

Так, решением уравнения $x + y = xy$ является пара значений переменных $x = 3$, $y = 1{,}5$. В самом деле, равенство $3 + 1{,}5 = 3 \cdot 1{,}5$ верное. Решениями этого уравнения служат также пары $x = 2$, $y = 2$ и $x = -1$, $y = 0{,}5$. А вот пара $x = 2$, $y = 3$ его решением не является, так как равенство $2 + 3 = 2 \cdot 3$ неверно.

> Пару чисел, являющуюся решением уравнения с переменными x и y, можно записывать и в виде двух равенств $x = a$, $y = b$, и в круглых скобках $(a; b)$, как координаты точки на плоскости. При записи решения в круглых скобках на первое место обязательно ставят значение переменной x, т.е. той переменной которая по алфавиту идёт первой.

Здесь вам предстоит первое знакомство с разделом математики, в котором геометрические объекты изучаются средствами алгебры с помощью метода координат. Называется он аналитической геометрией. Родоначальники аналитической геометрии — два крупнейших французских математика XVII в. Пьер Ферма́ и Рене Декарт, которые практически одновременно, но независимо друг от друга стали разрабатывать основы этой новой для того времени области математики. Возможно, более точным для неё было бы название «алгебраическая геометрия». Но в Средние века в Европе математики часто не признавали слово «алгебра» и говорили об «аналитическом искусстве», имея в виду искусство анализировать геометрические задачи с помощью формул и уравнений. Отсюда и такое название.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Уравнение с двумя переменными, так же как и уравнение с одной переменной, можно преобразовывать:

- переносить слагаемое из одной части уравнения в другую, меняя при этом его знак на противоположный;
- умножать или делить обе части уравнения на одно и то же число, отличное от нуля.

При этом получается уравнение, имеющее то же множество решений, что и исходное. Например, такие уравнения, как

$$2x - 6y = 10 \text{ и } x - 3y = 5,$$
$$y - 4x = x^2 - y \text{ и } 2y = x^2 + 4x,$$

имеют одно и то же множество решений. (Для каждой пары уравнений объясните, как второе уравнение получено из первого.)

Эти свойства уравнений с двумя переменными позволяют выражать одну переменную через другую. Возьмём, например, уравнение $2y + 4 = x^2$ и выразим переменную y через переменную x:

$2y = x^2 - 4$ — перенесли число 4 в правую часть, поменяв «+» на «−»;

$y = 0{,}5x^2 - 2$ — разделили обе части уравнения на 2.

Говорят, что уравнение $2y + 4 = x^2$ *решили относительно переменной* y.

Для уравнения, записанного в таком виде, легко находить его решения. Так, в данном случае в качестве x можно брать любое число, а соответствующее значение y вычислять по формуле $y = 0{,}5x^2 - 2$. Например:

если $x = 0$, то $y = -2$; пара $(0; -2)$ — решение уравнения $y = 0{,}5x^2 - 2$, а значит, и уравнения $2y + 4 = x^2$;

если $x = 4$, то $y = 6$; получаем ещё одно решение — пару $(4; 6)$.

Очевидно, что можно найти сколько угодно пар, удовлетворяющих уравнению $2y + 4 = x^2$, а значит, это уравнение имеет бесконечно много решений.

Как правило, уравнение с двумя переменными имеет бесконечное множество решений. Мы говорим «как правило», потому что возможны исключения. Так, уравнение $x^2 + y^2 = 0$ имеет единственное решение — пару $(0; 0)$; а уравнение $x^2 + y^2 = -4$ решений вообще не имеет.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ В ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ

Если уравнение с двумя переменными составлено по условию задачи, то поиск ответа на поставленный вопрос всегда полезно начинать с обдумывания того, какие числовые значения принимают фигурирующие в условии величины. Могут ли они быть отрицательными или же только положительными? Могут ли быть

При записи решения уравнения с двумя переменными в виде пары важен порядок составляющих её чисел. Например, пара $(2; 6)$ является решением уравнения $4x - y = 2$, а пара $(6; 2)$ — нет.

Задача. Найдём два неравных положительных числа, разность которых равна разности их квадратов.

Решение. Обозначим числа через x и y. По условию

$$x - y = x^2 - y^2.$$

Выразим из этого уравнения y через x:

$$(x - y) - (x^2 - y^2) = 0,$$
$$(x - y)(1 - (x + y)) = 0.$$

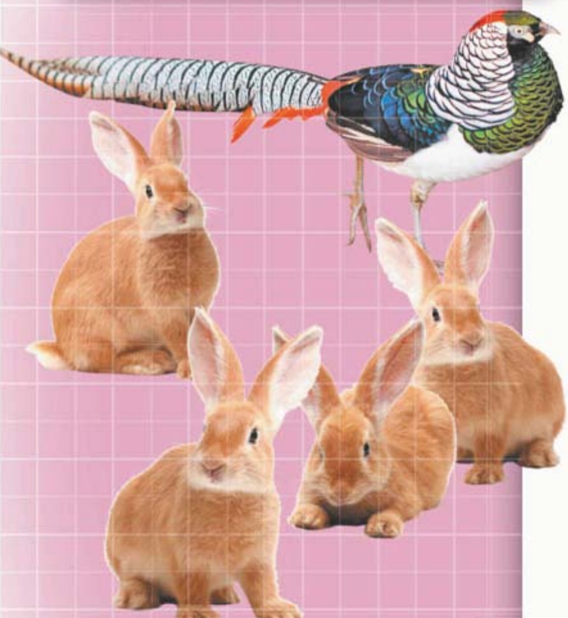
Так как $x \neq y$, то $x - y \neq 0$, значит,

$$1 - (x + y) = 0,$$
$$y = 1 - x.$$

Ответ. Таких пар чисел бесконечно много: это любая пара $(x; y)$, в которой $0 < x < 1$ $(x \neq 0{,}5)$ и $y = 1 - x$. (Объясните, почему $x < 1$ и $x \neq 0{,}5$.)

Например: $x = 0{,}1$, $y = 0{,}9$; $x = 0{,}35$, $y = 0{,}65$.

Решение в целых числах уравнений с целыми коэффициентами с двумя и более переменными — одна из древнейших математических задач. Она привлекала внимание выдающихся математиков разных времён, таких, например, как Пифагор (VI в. до н. э.), П. Ферма́ (XVII в.), Л. Эйлер (XVIII в.), К. Гаусс (XIX в.). Много занимался этой проблемой древнегреческий учёный Диофант Александрийский (III в. до н. э.). Он изобрёл разные способы решения уравнений в целых числах, поэтому их часто называют диофантовыми уравнениями.



дробными или должны быть целыми? Такой анализ условия задачи поможет не только избежать ошибок в ответе, но и найти решение.

В качестве примера рассмотрим старинную задачу:

«В клетке сидят фазаны и кролики, всего у них 18 ног. Сколько может быть в клетке тех и других?»

Для перевода условия этой задачи на математический язык естественно ввести две переменные. Пусть в клетке x фазанов и y кроликов. Так как у фазанов по 2 ноги, а у кроликов по 4, то приходим к уравнению

$$2x + 4y = 18.$$

Разделив обе его части на 2, получим более простое уравнение

$$x + 2y = 9.$$

Это уравнение имеет бесчисленное множество решений, и может показаться, что для ответа на вопрос задачи не хватает данных. Однако мы должны учесть тот факт, что ни количество фазанов, ни количество кроликов отрицательным или дробным числом выражаться не может. Поэтому надо найти лишь такие пары x и y, удовлетворяющие этому уравнению, которые составлены из целых положительных чисел, или, как говорят, *решить уравнение в целых числах*.

Выразив из уравнения переменную y через переменную x, получим $y = \frac{9 - x}{2}$. Далее воспользуемся простым перебором: будем подставлять вместо переменной x натуральные числа, начиная с 1, и вычислять соответствующие значения переменной y. При этом есть смысл брать только такие значения x, при которых дробь $\frac{9 - x}{2}$ тоже будет числом натуральным. А значит, это должны быть значения x, при которых разность $9 - x$ окажется положительным чётным числом.

Из этих рассуждений понятно, что в качестве значений x следует брать числа 1, 3, 5 и 7. Всего получим четыре пары x и y, подходящие по смыслу задачи:

x	1	3	5	7
y	4	3	2	1

Ответ. Задача имеет четыре решения: в клетке могут сидеть 1 фазан и 4 кролика, 3 фазана и 3 кролика, 5 фазанов и 2 кролика, 7 фазанов и 1 кролик.

ГРАФИК УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ Использование системы координат, связывающей пары чисел и точки плоскости, позволяет привлечь для изучения уравнений с двумя переменными наглядные геометрические образы. Каждую пару чисел, являющуюся решением уравнения с переменными x и y, можно изобразить точкой координатной плоскости. Множество всех таких точек называют **графиком уравнения**.

Слово «график» происходит от латинского слова *graphica*, означающего «живопись, рисование, письмо, черчение». Интересно, что слово «график» в русском языке употребляется не только в значении «чертёж», но и как синоним слова «расписание» в таких словосочетаниях, как «график движения», «график дежурства». В таком смысле слово «график» стало употребляться, видимо, потому, что расписание может быть представлено и в графическом виде.

! Точка с координатами x и y принадлежит графику уравнения с двумя переменными в том и только том случае, когда пара чисел $(x;\ y)$ является решением этого уравнения.

Это утверждение можно сформулировать в виде двух следующих предложений:
- если точка с координатами x и y принадлежит графику уравнения с двумя переменными, то пара чисел $(x;\ y)$ является его решением;
- если пара чисел $(x;\ y)$ является решением уравнения с двумя переменными, то точка с координатами x и y принадлежит его графику.

Вы уже знакомы с графиками таких уравнений, как $y = x$, $y = -x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = |x|$, $y = \sqrt{x}$. Посмотрим теперь, что представляет собой график рассмотренного на с. 111 уравнения $2y + 4 = x^2$. Для этого воспользуемся формулой $y = 0{,}5x^2 - 2$, выражающей переменную y через переменную x, и найдём ещё несколько решений этого уравнения. Составим таблицу:

x	0	1	−1	2	−2	3	−3	4	−4
y	−2	−1,5	−1,5	0	0	2,5	2,5	6	6

Отметим в координатной плоскости точки, координаты которых указаны в таблице, и проведём через них плавную линию (**рис. 4.1**). Эта линия — график уравнения $y = 0{,}5x^2 - 2$, а значит, и уравнения $2y + 4 = x^2$. Такая линия, как вы знаете, называется *параболой*.

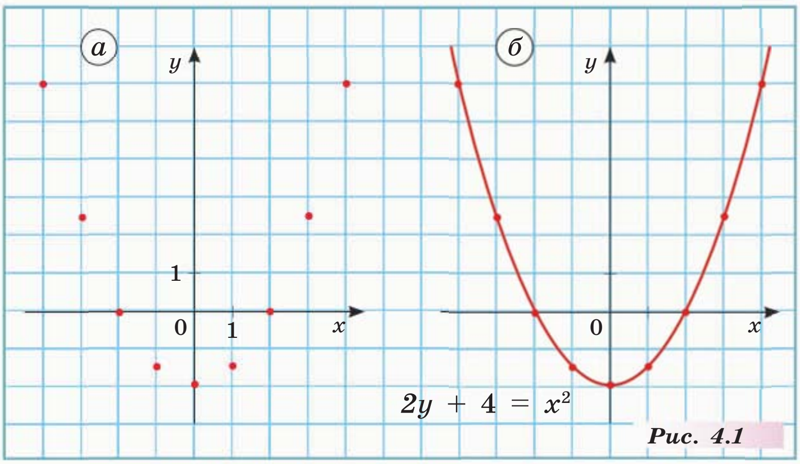
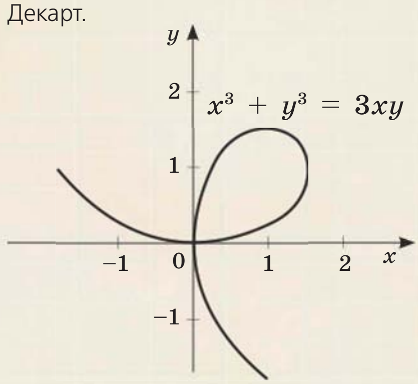


Рис. 4.1

Заметим, что построение графика полезно начинать с анализа уравнения с целью выявления тех или иных особенностей его геометрического образа. Так, из уравнения $y = 0{,}5x^2 - 2$ видно, что противоположным значениям x соответствуют равные значения y. Значит, график должен быть симметричен относительно оси y. Это можно было бы учесть при построении.

Замечательные геометрические объекты — кривые линии — всегда привлекали внимание математиков. На рисунке изображена изящная кривая — график уравнения $x^3 + y^3 = 3xy$, которую называют *декартовым листом*. Когда-то эта кривая носила поэтическое название «лист жасмина». А декартовым листом её впоследствии назвали потому, что её уравнение составил великий французский математик и философ Рене Декарт.



ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

1) Сформулируйте определение решения уравнения с двумя переменными.

2) Докажите, что пара $(9;\ 3)$ является решением уравнения $x + y = 2(x - y)$, а пара $(3;\ 9)$ его решением не является.

- Составьте какое-нибудь уравнение с двумя переменными, решением которого является пара $(-3;\ 4)$.
- Решите уравнение $3x + 5y = 10$ относительно переменной y, комментируя при этом свои действия. Затем решите это же уравнение относительно переменной x.
- Что представляют собой графики уравнений: $y - x = 0$, $y + x = 0$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$, $y = |x|$? Постройте каждый из них.

УПРАЖНЕНИЯ

РАБОТАЕМ С ОПРЕДЕЛЕНИЕМ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

421 Какие из пар чисел (0; 2), (2; 0), (−3; −1), (−1; 1), (10; −0,8) являются решениями уравнения $xy + x = 2$?

422 Проверьте, является ли пара чисел (−2; 2) решением уравнения:
а) $x - y = -4$; б) $x + 2 = 2y$; в) $y = -\frac{4}{x}$; г) $\frac{2}{x} + \frac{4}{y} = 1$.

423 Какие из утверждений являются верными? Неверные утверждения переформулируйте так, чтобы они стали верными:
1) пара чисел (−3; 0) является решением уравнения $x^2 + y^2 = 9$;
2) пара чисел (1; 2) является решением уравнения $x^3 + y^3 = 7$;
3) пара чисел (−4; 3) не является решением уравнения $\frac{x}{2} + \frac{2y}{3} = 0$;
4) пара чисел (−2; −1) не является решением уравнения $x^2 + 4y = 8$.

424 Известно, что площадь прямоугольника равна 12 см^2. Требуется найти длины сторон этого прямоугольника.
1) Обозначьте неизвестные величины буквами и запишите условие задачи в виде уравнения с двумя переменными.
2) Сколько решений имеет составленное уравнение? Укажите четыре его решения, которые могут служить ответом на вопрос задачи, а затем ещё два решения, которые в качестве ответа на вопрос задачи не подходят.

425 Дано уравнение $x + 2y = 6$. Найдите такую пару чисел, являющуюся его решением, в которой:
а) второе число равно первому; б) второе число противоположно первому.

426 Пара чисел $(\frac{2}{3}; -6)$ является решением уравнения $xy = c$, где x и y — переменные, а c — некоторое число. Найдите c и назовите ещё шесть решений этого уравнения.

427 Имеет ли уравнение решения и если имеет, то сколько? Приведите примеры решений (в случае если они есть):
а) $y = x^2$; в) $xy = 8$; д) $|x| + |y| = 0$;
б) $x^2 = y^2$; г) $xy = 0$; е) $x^2 + y^2 + 4 = 0$.

428 Объясните, почему пара положительных чисел не может служить решением уравнения: а) $4x + 3y = -5$; б) $-2x - 7y = 8$.

Неверно! Восьмиклассники Коля, Петя, Саша, Толя разошлись в вопросе о том, сколько решений имеет уравнение $xy = 5$. Вот их мнения:
Коля: «Решений нет»; Саша: «Два решения»;
Петя: «Одно решение»; Толя: «Четыре решения».
Есть ли среди ребят кто-то, чьё утверждение верно, или все они ошибаются?

ВЫРАЖАЕМ ИЗ УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ ОДНУ ПЕРЕМЕННУЮ ЧЕРЕЗ ДРУГУЮ

429 Выразите из уравнения $5x - 2y = 15$ переменную y через x, а затем переменную x через y.

430 Решите уравнение относительно y:

а) $x + 2y = 7$; в) $x + 2y = 6x - y$; д) $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$;
б) $8x - 10y = 0$; г) $4x^2 = y + 1$; е) $-1{,}2x + 0{,}6y = 2{,}4$.

431 Найдите несколько решений уравнения, предварительно выразив одну переменную через другую:

а) $x + y = 20$; в) $2x - y + 10 = 0$; д) $4y - x^2 = 2x$;
б) $4x + y = 0$; г) $x - 3y + 1 = 0$; е) $1{,}6x - 0{,}2y = 0{,}4x^2$.

432 Прочитайте задачу: «Периметр равнобедренного треугольника равен 16 см. Какими могут быть длины его боковой стороны и основания?»
Составьте по условию задачи уравнение с двумя переменными, выразите одну переменную через другую. Используя полученную формулу, найдите несколько ответов на вопрос задачи.
Подсказка. Не забудьте, что выбранные вами длины должны удовлетворять неравенству треугольника.

433 МАТЕМАТИКА ВОКРУГ НАС Иван хочет на дачном участке с помощью 10-метровой металлической сетки огородить для кроликов загон прямоугольной формы. Загон должен примыкать к стене дома. На плане (***рис. 4.2***) указаны некоторые размеры дома и показано предполагаемое положение загона.
Опишите зависимость между длинами смежных сторон загона в виде уравнения с двумя переменными. Найдите несколько решений этого уравнения, подходящих в качестве размеров загона. Подсчитайте, в каком случае выбранные вами размеры позволяют огородить загон бóльшей площади.

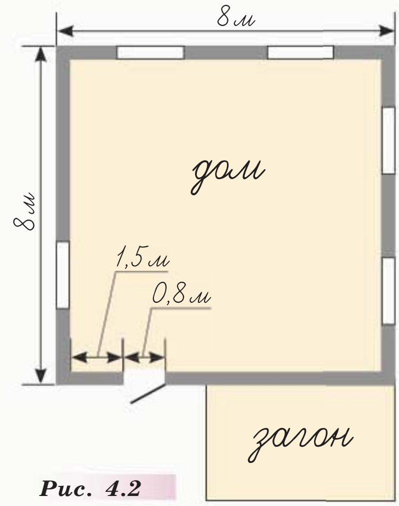


Рис. 4.2

РЕШАЕМ УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ В ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ

434 Найдите все решения уравнения, составленные из двух натуральных чисел:
а) $x + y = 6$; б) $xy = 12$; в) $2x + y = 10$; г) $0{,}5x + y = 6$.

435 Тест по геометрии содержал задачи, оцениваемые 3 баллами и 4 баллами. Среди задач, решённых Олегом, были задачи как одного, так и другого уровня. Всего он набрал 27 баллов. Могло ли быть так, что: а) Олег решил пять задач, оценённых 3 баллами; б) Олег решил две задачи, оценённые 4 баллами?

436 У осьминога 8 ног, а у морской звезды 5. Сколько в аквариуме тех и других, если всего у них 39 ног?

437 Петя заплатил 19 р., используя только пятирублёвые и двухрублёвые монеты. Как он мог произвести оплату? Найдите все возможные варианты.

438 Ученики начальной школы на уроке математики выкладывают из палочек пятиугольники и шестиугольники (каждая палочка должна служить стороной только одного многоугольника). Всего в наборе 100 палочек, и все их нужно использовать. Сколько пятиугольников и сколько шестиугольников может получиться?

439 Подданные привезли в дар шаху 300 драгоценных камней. Камни уложили в маленькие шкатулки по 15 штук в каждой и в большие — по 40 штук в каждой. Сколько было тех и других шкатулок, если известно, что маленьких было меньше, чем больших?

440 Учащиеся 8 класса выполняли тест, содержащий задания по алгебре и геометрии. За каждый верный ответ на алгебраический вопрос выставлялось 3 балла, а на геометрический — 4 балла. Ученик верно ответил на все вопросы теста и получил 100 баллов. Сколько в тесте могло быть заданий по алгебре и сколько по геометрии, если по каждому из этих предметов было не менее 10 заданий?

441 На неделю учащимся 8 класса было предложено для решения два списка задач: по алгебре и по геометрии. За каждую правильно решённую задачу по алгебре выставлялось 4 балла, а по геометрии — 5 баллов. Николай получил 80 баллов. Сколько задач по алгебре и сколько задач по геометрии решил Николай, если известно, что в каждом списке было по 15 задач?

442 На складе имеются пачки тетрадей по 25 штук и по 35 штук. Можно ли купить 445 тетрадей, не вскрывая пачки?

443 Для художественной студии планируется купить коробки карандашей, часть по цене 90 р. и часть по цене 50 р. На всю покупку может быть потрачено 1300 р. Какое наибольшее число коробок карандашей может быть куплено на эту сумму?

444 Андрей работает летом в кафе. За каждый час ему платят 100 р. и вычитают 20 р. за каждую разбитую тарелку. На прошедшей неделе он заработал 1800 р. Определите, сколько часов он работал и сколько разбил тарелок, если известно, что работает он не более 3 часов в день.

РАССМАТРИВАЕМ ГРАФИКИ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

445 1) Переведите на геометрический язык предложение: пара (5; 3) является решением уравнения $x^2 - y^2 = 16$.
2) Переведите на алгебраический язык предложение: точка (−2; 0) принадлежит графику уравнения $y - x^2 = 2x$.

446 Принадлежит ли графику уравнения $xy = -6$ точка A (−2; −3)? точка B (6; −1)? точка C (−0,5; 3)? точка D $\left(18; -\frac{1}{3}\right)$?

447 По графику уравнения $2x + y = 5$, изображённому на рисунке ***4.3***, найдите: 1) несколько решений этого уравнения, составленных из чисел одного знака, а затем — из чисел разных знаков; 2) решения, в которых одно из чисел — 0. В каждом случае проверьте подстановкой, правильно ли указано решение.

448 Выразите из уравнения переменную y через переменную x, составьте таблицу соответственных значений x и y и постройте по точкам график уравнения:

а) $2x - y - 4 = 0$; в) $x^2 = y + 4x$;

б) $x + 2y = 6$; г) $y - x^2 = -4$.

В заданиях 449—452 рассматриваются уравнения, графиками которых являются окружности. Выполняйте их последовательно, одно за другим.

449 1) Графиком уравнения $x^2 + y^2 = 9$ является окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 3 (***рис. 4.4***). Найдите по графику координаты точек пересечения этой окружности с осью x и с осью y. Проверьте себя подстановкой найденных пар чисел в уравнение.
2) Как можно найти координаты точек пересечения окружности $x^2 + y^2 = 9$ с осями координат, не прибегая к графику?
Подсказка. У всех точек на оси абсцисс $y = 0$, а у всех точек на оси ординат $x = 0$.

450 1) График уравнения $x^2 + y^2 = 16$ — окружность с центром в начале координат. Вычислите координаты точек её пересечения с осью x и с осью y.
2) Постройте эту окружность в координатной плоскости. Чему равен её радиус?

451 1) График уравнения $x^2 + y^2 = 25$ — окружность с центром в начале координат. В каких точках она пересекает ось x и ось y? Аккуратно постройте эту окружность.
2) Убедитесь с помощью подстановки, что точка A (3; 4) лежит на окружности. Отметьте эту точку на чертеже.
3) Используя соображения симметрии, отметьте ещё три точки, лежащие на окружности, и назовите их координаты.

452 График уравнения $x^2 + 2x + y^2 = 3$ — окружность, изображённая на рисунке ***4.5***. Вычислите координаты точек пересечения этой окружности с осями координат. Чему равен её радиус?

453 Графиком уравнения $(x^2 + y^2 + y)^2 = x^2 + y^2$ является кривая, изображённая на рисунке ***4.6***. Она называется *кардиоидой*, так как имеет форму сердца. Найдите координаты точек, в которых кардиоида пересекает ось x и ось y.

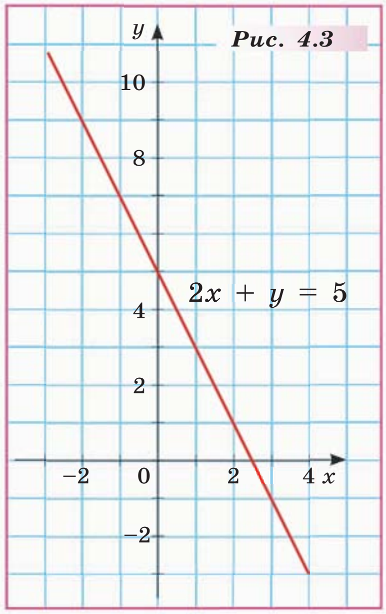


Рис. 4.3

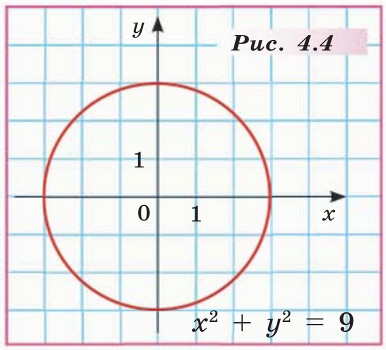


Рис. 4.4

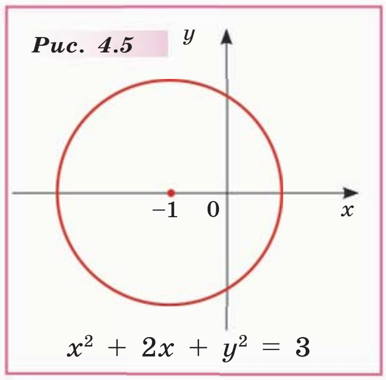


Рис. 4.5

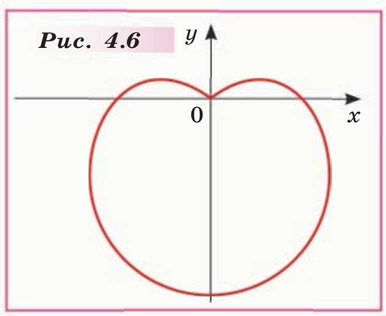


Рис. 4.6

4.2 ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ И ЕГО ГРАФИК

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Какое уравнение с двумя переменными называют линейным.
- Что представляет собой график линейного уравнения с двумя переменными и каков алгоритм его построения.

Уравнения с двумя переменными описывают на математическом языке взаимосвязь двух величин. Часто эта связь между величинами выражается в виде так называемого линейного уравнения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

! Линейным уравнением с двумя переменными называется уравнение вида $ax + by = c$, где a, b и c — некоторые числа.

Например, уравнение $4x - 5y = 10$ является линейным, а уравнения $4x^2 - 5y = 10$ и $\frac{4}{x} - \frac{5}{y} = 10$ — нет.

В уравнении $4x - 5y = 10$ коэффициенты a и b отличны от нуля: $a = 4$, $b = -5$. Но эти коэффициенты могут быть любыми, в частности равняться нулю, как, например, в уравнениях $0 \cdot x + 3y = 12$ и $5x + 0 \cdot y = 30$. Такие уравнения обычно записывают в краткой форме: соответственно $3y = 12$ и $5x = 30$.

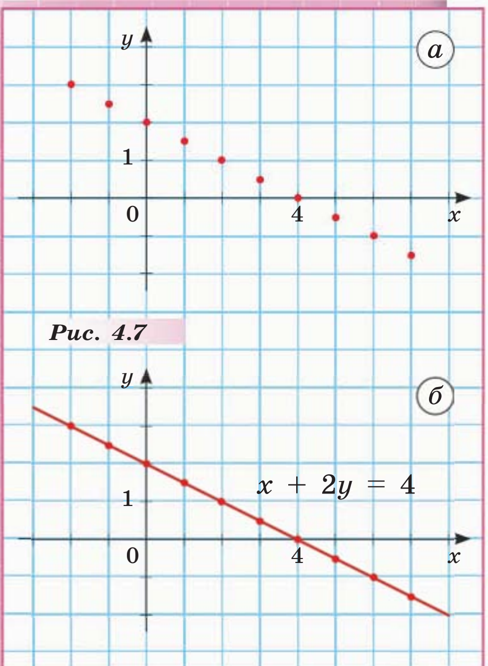


Рис. 4.7

ГРАФИК ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Посмотрим, что представляет собой график линейного уравнения $x + 2y = 4$. Для этого запишем уравнение в виде $y = -0{,}5x + 2$ и найдём несколько его решений:

x	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7
y	3	2,5	2	1,5	1	0,5	0	−0,5	−1	−1,5

Изобразим каждое решение точкой на координатной плоскости (***рис. 4.7**, а*). Все отмеченные точки «укладываются» на одну и ту же прямую (***рис. 4.7**, б*). Эта прямая — график уравнения $x + 2y = 4$.

Построим теперь график линейного уравнения, в котором один из коэффициентов при переменных равен 0. Возьмём уравнение $0 \cdot x + 2y = 7$, или, короче, $2y = 7$. Его решением является любая пара чисел, в которой x — произвольное число, а $y = 3{,}5$, например (2; 3,5), (0; 3,5), (−1; 3,5). График такого уравнения, как вы уже знаете, прямая, параллельная оси x (***рис. 4.8***).

Точно так же графиком уравнения $-4x + 0 \cdot y = 12$, т. е. уравнения $-4x = 12$, служит прямая, параллельная оси y (***рис. 4.8***).

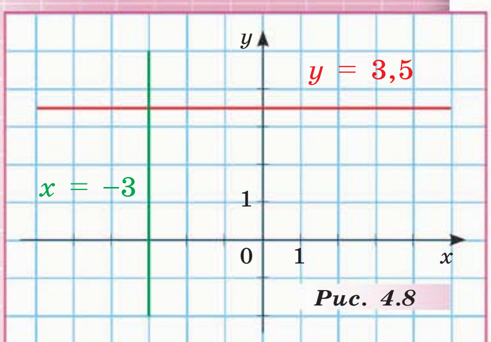


Рис. 4.8

! Графиком уравнения $ax + by = c$, где хотя бы один из коэффициентов a и b не равен нулю, является прямая. И наоборот: всякая прямая на координатной плоскости является графиком уравнения вида $ax + by = c$.

Поэтому уравнение $ax + by = c$, в котором хотя бы один из коэффициентов a и b отличен от 0, называют **уравнением прямой.**

Так как прямая задаётся двумя точками, понятен способ построения графика линейного уравнения: *достаточно отметить на координатной плоскости две любые его точки и провести через них прямую.*

Пример. Построим прямую, которая задаётся уравнением $x - 3y + 6 = 0$.

Найдём точки, в которых эта прямая пересекает оси координат. Подставив в уравнение $x = 0$, получим $-3y + 6 = 0$, т. е. $y = 2$. Значит, ось y график пересекает в точке $(0; 2)$. Подставив в уравнение $y = 0$, получим $x + 6 = 0$, т. е. $x = -6$. Значит, прямая пересекает ось x в точке $(-6; 0)$.

Отметим на координатных осях точки $(0; 2)$ и $(-6; 0)$ и проведём через них прямую. Эта прямая и есть график уравнения $x - 3y + 6 = 0$ (***рис. 4.9***).

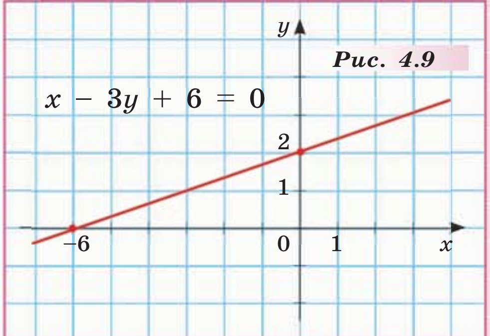


Рис. 4.9

ПРАКТИЧЕСКАЯ СИТУАЦИЯ В фирму по изготовлению стройматериалов поступил заказ на 300 $м^3$ особо прочных кирпичей. У фирмы есть два завода (A и B), на которых такие кирпичи могут быть изготовлены. Завод A может изготавливать в день 25 $м^3$ кирпичей, а завод B — 50 $м^3$. Директор по производству хочет, чтобы в выполнении заказа участвовали оба завода. Какие есть варианты организации работы?

Пусть завод A будет работать по этому заказу x дней, а завод B — y дней. В соответствии с условием

$$25x + 50y = 300, \text{ т. е.}$$
$$y = -0{,}5x + 6.$$

Для наглядности изобразим зависимость между x и y графически (***рис. 4.10***).

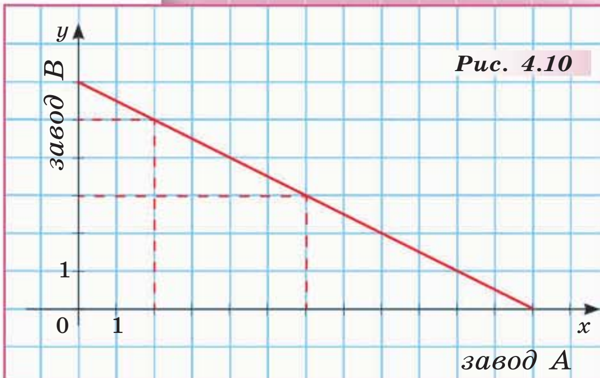


Рис. 4.10

Вы видите, что варианты есть разные. Например: завод A будет работать 6 дней, а завод B — 3 дня; или завод B будет работать 5 дней, а завод A — 2 дня.

Заказчик считает, что если заводы начнут работу в один день, то заказ может быть выполнен за 3 дня. Директор утверждает, что в этом случае потребуется 4 дня. Как вы считаете, кто из них прав? И есть ли вариант, при котором заказ можно будет выполнить меньше, чем за 4 дня?

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Даны уравнения $\frac{x}{2} + y = 5$ и $\frac{2}{x} + y = 5$. Графиком какого из них является прямая? В уравнении прямой назовите коэффициенты a, b и c.
- На примере уравнения $2x - y = 4$ расскажите, как находят координаты точек пересечения графика уравнения с осями координат. Постройте по этим точкам прямую, заданную уравнением $2x - y = 4$, и укажите координаты ещё двух её точек.
- Приведите примеры уравнений вида $ax + by = c$, в которых один из коэффициентов при переменных равен нулю. Запишите их в развёрнутом виде и в краткой форме. Постройте их графики.
- Графики каких уравнений, не являющихся линейными, вам знакомы?

УПРАЖНЕНИЯ

НАХОДИМ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

454 Какие из следующих уравнений являются линейными:

1) $2x - 3y = 6$; 3) $-5x + 3y = 0$; 5) $3xy + 2y = 6$;
2) $4x^2 - 2y = 7$; 4) $9x + 0 \cdot y = 1$; 6) $x + \frac{2}{y} = 10$?

Для каждого линейного уравнения укажите коэффициенты a, b и c.

455 Выразите из уравнения переменную y и найдите несколько его решений:

а) $3x - 5y = 10$; б) $\frac{x}{3} + y = -1$; в) $-5x + 2y = 0$; г) $\frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 3$.

Для каждого уравнения приведите примеры целочисленных решений.

456 1) Каждое из уравнений $0{,}5x + 0 \cdot y = 3$ и $0 \cdot x - 2y = 1$ запишите в краткой форме и назовите несколько его решений.
2) Каждое из уравнений $10x = 4$ и $5y = 6$ является краткой записью уравнения с двумя переменными. Запишите эти уравнения в развёрнутом виде и назовите несколько решений каждого из них.

457 Составьте линейное уравнение с двумя переменными, одним из решений которого является пара: а) $(2; -3)$; б) $(4; 0)$. Дайте несколько ответов.

СТРОИМ ГРАФИК ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

458 1) На рисунке ***4.3*** изображена прямая — график уравнения $2x + y = 5$. Найдите по графику координаты точек пересечения этой прямой с осью x и с осью y и проверьте себя подстановкой.
2) Представьте, что эту прямую продолжили вверх и вниз. Пройдёт ли она через точку A $(12; -19)$? B $(-12; 29)$? C $(16{,}5; -38)$? D $(-14{,}5; 34)$?

459 Постройте прямую, являющуюся графиком данного уравнения, найдя точки её пересечения с осями координат:

а) $x + y = 5$; в) $x - y + 1 = 0$; д) $3x - y = 6$;
б) $x - y = 3$; г) $x + y + 4 = 0$; е) $2x + y = 8$.

460 1) В примере на с. 119 график уравнения $x - 3y + 6 = 0$ был построен по точкам пересечения с осями координат. Но его можно построить и по другим точкам. Сделайте это, следуя такому плану:
- Решите уравнение $x - 3y + 6 = 0$ относительно переменной y.
- Вычислите координаты двух точек графика, не принадлежащих координатным осям. (*Совет.* Возьмите значения x, кратные 3, например 3 и -3; тогда вы получите точки с целыми координатами.)
- Начертите систему координат, отметьте найденные точки и проведите через них прямую. Сравните свой чертёж с рисунком ***4.9***. В каких точках прямая на вашем чертеже пересекла оси?

2) Воспользовавшись рассмотренным планом, постройте прямую $x + 4y - 8 = 0$.

461 Постройте прямую по её уравнению, найдя две любые принадлежащие ей точки:

а) $x + 2y - 8 = 0$; б) $2x + 3y = -6$; в) $3x - 4y = 12$; г) $1{,}25x - y = 1$.

462 Запишите уравнение прямой, зная коэффициенты a, b и c, и постройте эту прямую:
а) $a = 0$, $b = 3$, $c = 6$; в) $a = 2$, $b = 0$, $c = -10$; д) $a = 2$, $b = 4$, $c = 0$;
б) $a = 0$, $b = 2$, $c = -5$; г) $a = 5$, $b = 0$, $c = 5$; е) $a = 4$, $b = 2$, $c = 0$.

463 Постройте прямую $7x + 3y - 21 = 0$ по точкам пересечения с осями координат. Проходит ли эта прямая через точку: а) $(11; -19)$; б) $(-9; 28)$?

464 а) Выясните, проходит ли прямая $5x - 12y = 29$ через точку A $(20; 6)$; через точку B $(-11; -7)$.
б) Принадлежит ли прямой $8x + 7y = 56$ точка A $(3{,}5; 4)$? точка B $(-7; 15)$?

465 1) Две прямые заданы своими уравнениями: $2x + 3y = -18$ и $2x - 3y = 6$. Выясните, какая из них проходит через точки M $(-3; -4)$ и N $(6; 2)$.
2) Постройте эти прямые в одной системе координат и покажите положение в координатной плоскости точек M и N.

466 Постройте данные прямые в одной системе координат и определите по рисунку координаты точки их пересечения. Проверьте результат подстановкой:
а) $4x - 3y = 12$ и $2x + 2y = 1$; б) $2x + y = 4$ и $7x - 2y = 3$.

467 Найдите неизвестные координаты точек A $(0; y)$, B $(x; 0)$, C $(2; y)$ и D $(x; 6)$, зная, что каждая из них принадлежит графику уравнения:
а) $x + y = 1$; б) $2x - 5y = 10$; в) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 2$; г) $-1{,}2x + 0{,}4y = 4{,}8$.

468 Постройте в одной и той же системе координат следующие прямые:
$3x + 2y - 18 = 0$, $x + 2y - 13 = 0$, $3x - 15 = 0$ и $2y - 12 = 0$.
Определите координаты точек пересечения:
а) прямых $3x + 2y - 18 = 0$ и $2y - 12 = 0$;
б) прямых $x + 2y - 13 = 0$ и $3x - 15 = 0$.

469 Прямые $5x + 2y = 10$, $x = -2$, $y = -5$, попарно пересекаясь, образуют треугольник. Вычислите его площадь.

470 а) Известно, что прямая $ax + 3y = 5$ проходит через точку $(10; -5)$. Найдите коэффициент a и постройте эту прямую.
б) Известно, что прямая $5x + by = 2$ проходит через точку $(-2; 4)$. Найдите коэффициент b и постройте эту прямую.

471 а) Не выполняя построение, найдите точки первой координатной четверти с целыми координатами, принадлежащие прямой $x + 3y = 12$.
б) Сколько точек второй координатной четверти с целыми координатами принадлежит прямой $3x - 4y = -48$?

472 **МАТЕМАТИКА ВОКРУГ НАС** Парусная лодка в некоторый момент времени находится в 20 км от наблюдателя и движется в направлении к нему со скоростью 9 км/ч.
1) Обозначьте расстояние между лодкой и наблюдателем (в километрах) буквой y, а время движения лодки (в часах) — буквой x и составьте уравнение, связывающее y и x. Определите значение y при $x = 2$, $x = -1$, $x = 3$. Прокомментируйте в соответствии с условием задачи каждый ответ.
2) Постройте график составленного уравнения.

4.3 УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ ВИДА $y = kx + l$

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Какую информацию можно получить о положении прямой в координатной плоскости, записав её уравнение в виде $y = kx + l$.
- Каков геометрический смысл коэффициентов k и l в уравнении $y = kx + l$.
- Условие параллельности прямых, заданных уравнениями вида $y = kx + l$.

Задача выражения одной переменной через другую из различных уравнений и формул возникает довольно часто. Например, из формулы скорости равноускоренного движения $v = v_0 + at$ бывает нужно выразить время t. По сути требуется решить линейное уравнение с переменными v и t относительно t, но только коэффициенты уравнения в данном случае буквенные. Получим

$$at = v - v_0,$$

$$t = \frac{v - v_0}{a}.$$

Линейное уравнение вида $ax + by = c$, в котором $b \neq 0$, можно всегда решить относительно переменной y. Например:
если дано уравнение $3x - 2y = 6$, то $y = 1{,}5x - 3$;
из уравнения $4x + 6y = 1$ следует, что $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{6}$;
из уравнения $0 \cdot x + 5y = -4$ находим, что $y = 0 \cdot x - 0{,}8$.

Иными словами, линейное уравнение, в котором коэффициент при y отличен от 0, всегда можно представить в виде $y = kx + l$, где k и l — некоторые числа. Такая запись линейного уравнения очень удобна. Изучив этот пункт, вы увидите, что непосредственно из уравнения прямой, представленного в таком виде, не выполняя самого построения, легко узнать, как эта прямая расположена в координатной плоскости.

ГРАФИК УРАВНЕНИЯ $y = kx$ Положение в координатной плоскости прямой, заданной уравнением вида $y = kx + l$, зависит от значений коэффициентов k и l. Выясним сначала, как влияет на положение прямой коэффициент k. Для этого рассмотрим случай, когда $l = 0$, и изучим особенности графика уравнения $y = kx$.

Прежде всего отметим следующий факт:

> **!** любая прямая, заданная уравнением вида $y = kx$, проходит через начало координат.

В самом деле, подставив в уравнение $y = kx$ значение x, равное 0, получим $y = k \cdot 0 = 0$. А это и означает, что точка O (0; 0) принадлежит графику.

Отсюда можно сделать практический вывод: для построения прямой $y = kx$ достаточно найти координаты лишь одной её точки, так как вторая уже имеется — это начало координат.

Посмотрим теперь, как влияет на положение прямой в координатной плоскости коэффициент k.

На рисунках ***4.11*** и ***4.12*** изображены прямые — графики уравнения $y = 2x$ и $y = -3x$, в которых коэффициенты при x имеют разные знаки. Прямая $y = 2x$ проходит через третий и первый координатные углы и поднимается вверх. При этом её часть, расположенная в верхней полуплоскости, образует с лучом Ox острый угол. Обратите внимание: каждому единичному шагу по оси x (при движении слева направо) соответствует подъём прямой $y = 2x$, равный 2 единицам.

Прямая $y = -3x$ проходит через второй и четвёртый координатные углы и опускается вниз. При этом её часть, расположенная в верхней полуплоскости, образует с лучом Ox тупой угол. Теперь каждому единичному шагу по оси x (при движении слева направо) соответствует спуск прямой $y = -3x$, равный 3 единицам.

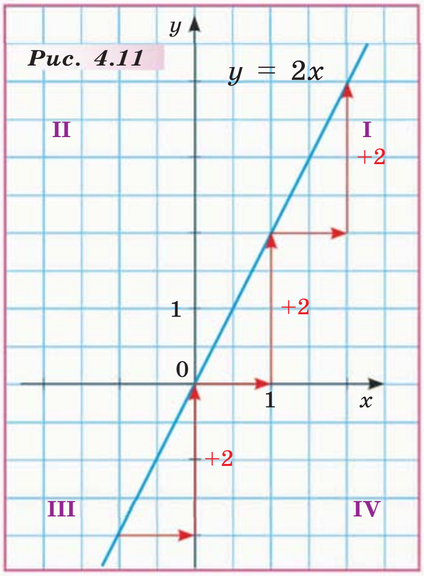


Рис. 4.11

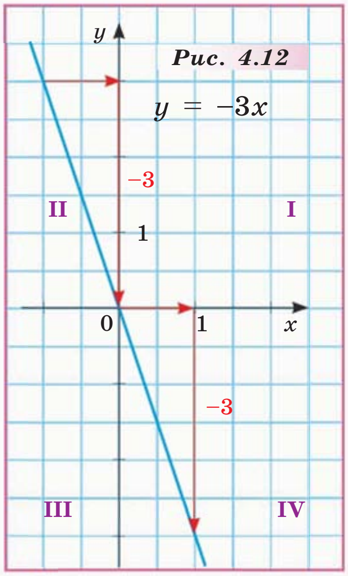


Рис. 4.12

График любого уравнения $y = kx$ при $k > 0$ располагается в координатной плоскости так же, как прямая $y = 2x$, а при $k < 0$ — как прямая $y = -3x$.

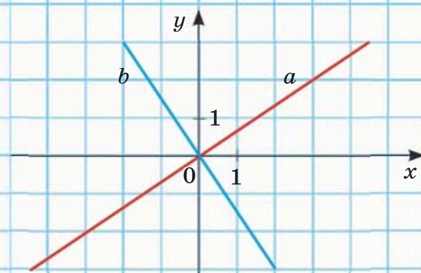
Это нетрудно доказать. Пусть $k > 0$. В этом случае если $x > 0$, то $y > 0$; если $x < 0$, то $y < 0$. Значит, все точки прямой $y = kx$ с положительными абсциссами находятся в первом координатном углу, а с отрицательными абсциссами — в третьем координатном углу.

Точно так же можно показать, что при $k < 0$ точки прямой $y = kx$ находятся во втором и четвёртом координатных углах (сделайте это самостоятельно).

Заметим, что если $k = 0$, то уравнение принимает вид $y = 0$, и график совпадает с осью x.

На рисунке ***4.13**, а, б* изображены графики уравнения $y = kx$ при различных значениях k — положительных и отрицательных. Обратите внимание: чем больше $|k|$, тем круче поднимается или опускается прямая.

Задача. Запишем уравнения прямых a и b:



Решение.

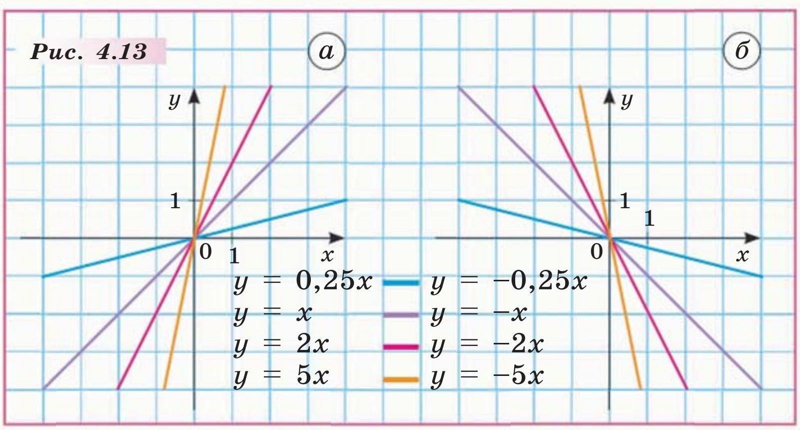
1) Прямые проходят через точку O (0; 0), значит, уравнение каждой прямой имеет вид $y = kx$.

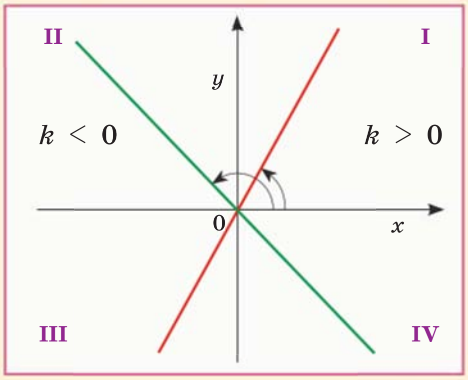
2) Прямая a проходит через точку (3; 2), т. е. верно равенство $2 = 3k$. Значит, $k = \frac{2}{3}$.

3) Прямая b проходит через точку (−2; 3), т. е. верно равенство $3 = -2k$. Значит, $k = -1{,}5$.

Ответ: $y = \frac{2}{3}x$ и $y = -1{,}5x$.

Рис. 4.13





Итак, мы выяснили, что:

- график уравнения $y = kx$ — это прямая, проходящая через начало координат;
- положение графика в координатной плоскости зависит от коэффициента k:
  при $k > 0$ прямая проходит через I и III координатные углы;
  при $k < 0$ прямая проходит через II и IV координатные углы;
  при $k = 0$ прямая совпадает с осью x.

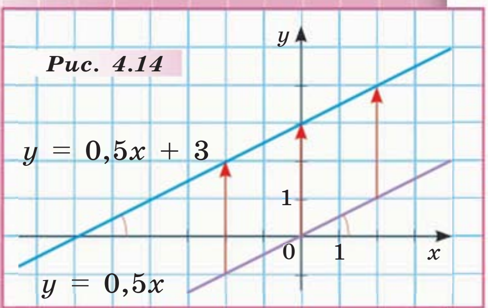


Рис. 4.14

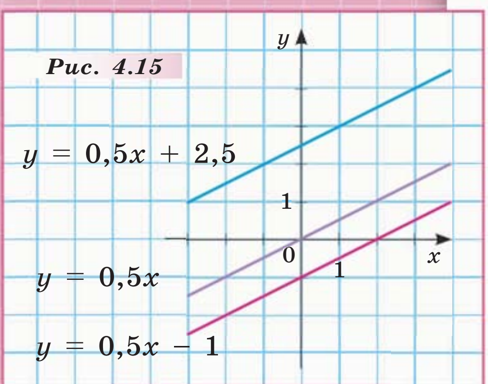


Рис. 4.15

УГЛОВОЙ КОЭФФИЦИЕНТ И НАЧАЛЬНАЯ ОРДИНАТА Выясним теперь, каково взаимное положение прямых, заданных уравнениями $y = kx$ и $y = kx + l$, в которых коэффициент при x один и тот же.

Возьмём, например, уравнения $y = 0{,}5x$ и $y = 0{,}5x + 3$. При любом x ордината точки прямой $y = 0{,}5x + 3$ на 3 единицы больше ординаты соответствующей точки прямой $y = 0{,}5x$. Значит, прямая $y = 0{,}5x + 3$ может быть получена сдвигом прямой $y = 0{,}5x$ на 3 единицы вверх вдоль оси y (*рис. 4.14*). Понятно, что угол между лучом Ox и частью прямой, расположенной в верхней полуплоскости, при этом не меняется. Значит, прямая $y = 0{,}5x + 3$ параллельна прямой $y = 0{,}5x$.

Точно так же прямые $y = 0{,}5x - 1$ и $y = 0{,}5x + 2{,}5$ могут быть получены сдвигом прямой $y = 0{,}5x$ вдоль оси y соответственно на 1 единицу вниз и на 2,5 единицы вверх; каждая из этих прямых параллельна прямой $y = 0{,}5x$ (*рис. 4.15*).

Из этих рассуждений понятно, что величина угла между лучом Ox и частью прямой $y = kx + l$, расположенной в верхней полуплоскости, зависит только от значения коэффициента k. Поэтому число k называют **угловым коэффициентом прямой $y = kx + l$**.

Заметим, что параллельность таких прямых, как $y = 0{,}5x$ и $y = 0{,}5x + 3$, можно обосновать и по-другому. Значения выражений $0{,}5x$ и $0{,}5x + 3$ ни при каком значении x не могут оказаться равными, поэтому прямые $y = 0{,}5x$ и $y = 0{,}5x + 3$ не могут иметь общих точек, а значит, они параллельны.

Коэффициент l в уравнении $y = kx + l$ также имеет определённый геометрический смысл: это ордината точки пересечения прямой с осью y. В самом деле, если подставить в уравнение $y = kx + l$ вместо x число 0, то получим, что $y = l$. Поэтому коэффициент l в уравнении $y = kx + l$ иногда называют **начальной ординатой**.

На рисунке ***4.16*** построено несколько прямых, заданных уравнениями вида $y = kx + l$, в которых начальная ордината одна и та же: она равна 2. Все прямые проходят через точку (0; 2), лежащую на оси y.

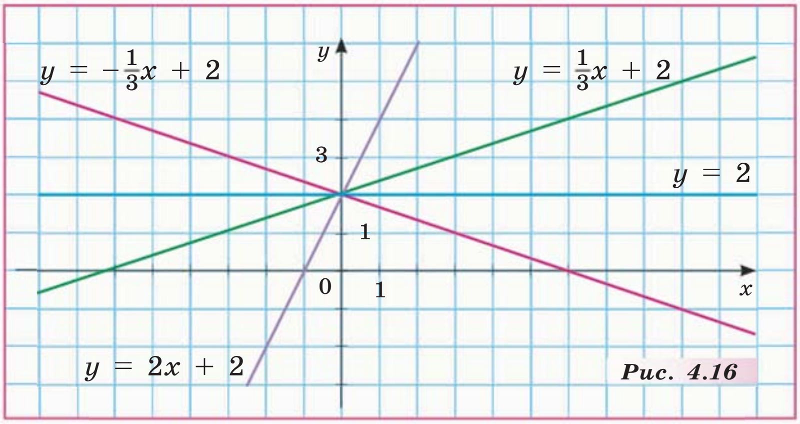


Рис. 4.16

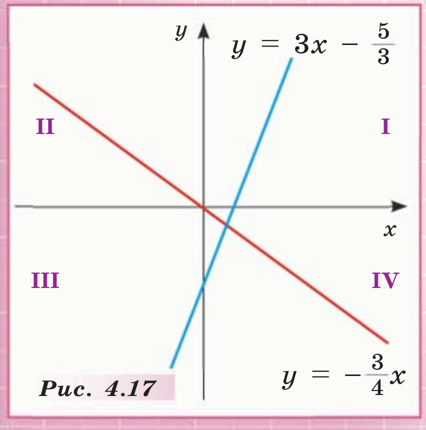


Рис. 4.17

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ И ПЕРЕСЕКАЮЩИЕСЯ ПРЯМЫЕ Выше мы показали, что каждая из прямых $y = 0{,}5x + 3$, $y = 0{,}5x - 1$, $y = 0{,}5x + 2{,}5$ параллельна прямой $y = 0{,}5x$. Очевидно, что все эти прямые параллельны между собой (***рис. 4.15***). Этот пример иллюстрирует следующее утверждение:

> **!** если у несовпадающих прямых угловые коэффициенты одинаковы, то эти прямые параллельны.

Если же две прямые имеют разные угловые коэффициенты, то эти прямые пересекаются. Например, прямые $y = -1{,}2x + 6$ и $y = -1{,}2x - 3$ параллельны, а прямые $y = -1{,}2x + 6$ и $y = 1{,}2x - 3$ пересекаются.

Задача. Прямые заданы уравнениями $9x - 3y = 5$ и $6x + 8y = 0$. Выясним, параллельны эти прямые или нет, и если прямые пересекаются, то где в координатной плоскости находится точка их пересечения.

Решение.

1) Выразим из каждого уравнения переменную y: $y = 3x - \frac{5}{3}$, $y = -\frac{3}{4}x$. Так как угловые коэффициенты прямых различны, то они пересекаются.

2) Чтобы ответить на второй вопрос, достаточно схематического рисунка (***рис. 4.17***). Прямая $y = -\frac{3}{4}x$ расположена во II и IV координатных углах. Прямая $y = 3x - \frac{5}{3}$ получается из прямой $y = 3x$ сдвигом вниз вдоль оси y. Прямая $y = 3x$ проходит через I и III координатные углы, а прямая $y = 3x - \frac{5}{3}$ пройдёт ещё и через IV координатный угол. Значит, «встречаются» прямые в IV координатном углу.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Прямая задана уравнением вида $y = kx + l$. Назовите k и l:
  а) $y = 7x - 4$; б) $y = 6 - \frac{x}{2}$; в) $y = -5 + x$; г) $y = -0{,}1x$.
- Докажите, что прямая $y = kx$ проходит через начало координат. Приведите примеры уравнений двух прямых, одна из которых проходит через начало координат, а другая нет.
- Покажите на рисунке, как расположена в координатной плоскости прямая $y = kx$ при $k > 0$ и при $k < 0$. Сформулируйте и докажите соответствующее утверждение.
- Две прямые заданы уравнениями вида $y = kx + l$. Как узнать, параллельны они или пересекаются? Приведите пример уравнений двух пересекающихся прямых и двух параллельных прямых. Как называется коэффициент k?
- Каков геометрический смысл коэффициента l в уравнении $y = kx + l$? Проиллюстрируйте свой ответ на примере прямой $y = x + 3$.

УПРАЖНЕНИЯ

СТРОИМ ГРАФИКИ УРАВНЕНИЙ ВИДА $y = kx$

473 Запишите уравнение прямой в виде $y = kx + l$ и назовите коэффициенты k и l:
а) $x + y = 5$; в) $5x + 10y = 32$; д) $5y - 2x = 0$; ж) $2y + 4 = 0$;
б) $3x - 0,5y = 6$; г) $\frac{x}{6} - \frac{y}{4} = 1$; е) $4x = 3y$; з) $3y = 10$.

474 Найдите координаты какой-нибудь точки прямой $y = kx$, отличной от точки O (0; 0), и постройте эту прямую:
а) $y = 3x$; в) $y = \frac{1}{2}x$; д) $y = 2,5x$; ж) $y = \frac{x}{3}$;
б) $y = -2x$; г) $y = -0,3x$; е) $y = -1,5x$; з) $y = -\frac{x}{4}$.
Совет. Удобнее выбирать точку с целыми координатами.

475 Запишите уравнение прямой $y = kx + l$ при указанных значениях k и l и постройте эту прямую:
1) $k = 1$, $l = 0$; 2) $k = -1$, $l = 0$; 3) $k = 0$, $l = 1$; 4) $k = 0$, $l = -1$.
Каким уравнением задаётся прямая, образованная биссектрисами I и III координатных углов? II и IV координатных углов?

476 Даны уравнения:
$$y = 4x^2,\ y = \frac{x}{4},\ y = 4x - 1,\ y = \frac{4}{x},\ y = -4x,\ y = -4.$$
Графиками каких из этих уравнений являются прямые, проходящие через начало координат? Постройте эти прямые.

477 Прямая задана уравнением вида $y = kx$. Покажите с помощью схематического рисунка положение этой прямой в координатной плоскости, если известно, что:
а) $k = 10$; б) $k = -0,3$; в) $k = 2,7$; г) $k = -2,8$.

478 Как ведёт себя в координатной плоскости прямая, заданная уравнением вида $y = kx$, при движении по оси x слева направо: поднимается вверх или опускается вниз? Каков подъём или спуск прямой при увеличении значения переменной x на 1? Проиллюстрируйте ответ рисунком:
а) $y = 1,5x$; б) $y = -2x$; в) $y = 4x$; г) $y = -2,5x$.

479 Координатная плоскость разделена биссектрисами координатных углов на 8 областей (***рис. 4.18***). В каких областях располагаются указанные прямые? Сделайте рисунок:
1) $y = 0,5x$; 3) $y = 5x$;
2) $y = -3x$; 4) $y = -4x$.

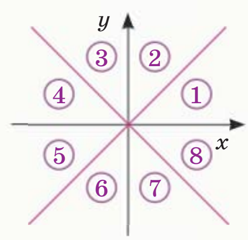
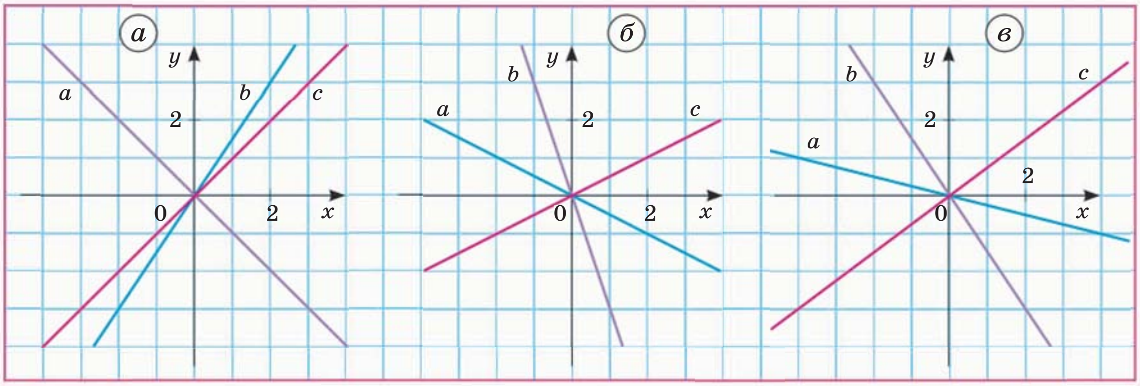


Рис. 4.18

480 1) Известны координаты точки A, через которую проходит прямая, заданная уравнением вида $y = kx$. Найдите коэффициент k и запишите уравнение этой прямой:
а) A (6; 2); б) A (4; 5); в) A (−3; 1); г) A (1; −3); д) A (−1; −3); е) A $\left(-1; -\frac{1}{3}\right)$.
2) Пусть прямая, заданная уравнением вида $y = kx$, проходит через точку с координатами $x = a$ и $y = b$. При каких a и b коэффициент k — число положительное, а при каких — отрицательное?

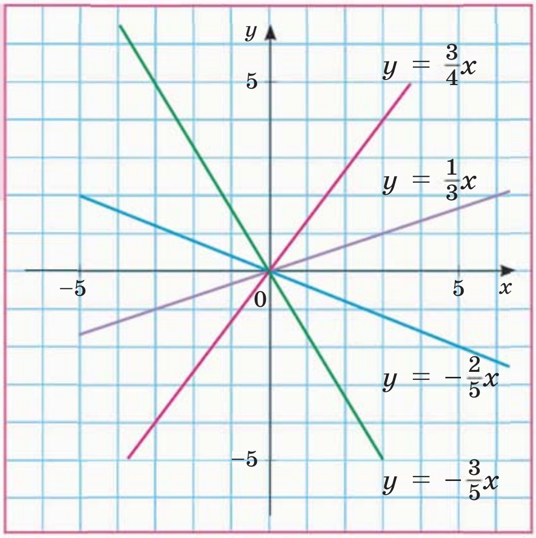
481 Запишите уравнения прямых, изображённых на рисунке *4.19*.

Рис. 4.19



Неверно! Наташа должна была подписать уравнения прямых, изображённых на рисунке *4.20*. Проверьте, всё ли она сделала верно.

Рис. 4.20



ОСВАИВАЕМ ПОНЯТИЯ «УГЛОВОЙ КОЭФФИЦИЕНТ» И «НАЧАЛЬНАЯ ОРДИНАТА»

482 Прямые заданы уравнениями:
$y = \frac{1}{2}x + 1$, $y = \frac{1}{2}x - 4$, $y = \frac{1}{2}x - 2{,}5$.

1) Чему равны угловые коэффициенты прямых?

2) Расскажите, как каждая из прямых может быть получена из прямой $y = \frac{1}{2}x$.

3) В каких точках прямые пересекают ось y?

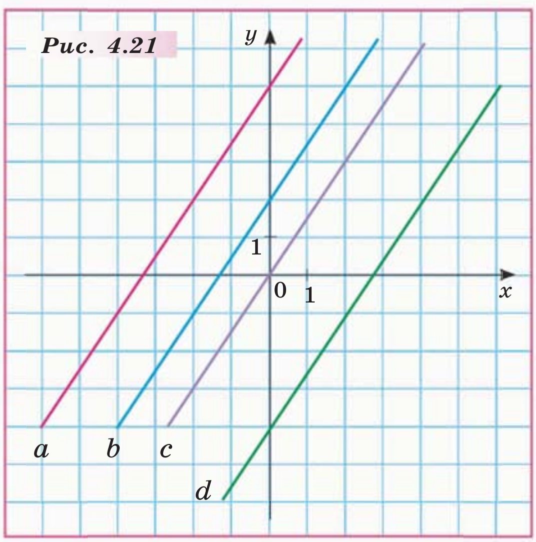
4) Постройте эти прямые.

483 На рисунке *4.21* изображены прямые a, b, c и d. Соотнесите каждую из прямых с одним из следующих уравнений:

$y = \frac{3}{2}x$, $\quad y = \frac{3}{2}x + 5$,

$y = \frac{3}{2}x + 2$, $\quad y = \frac{3}{2}x - 4$.

Рис. 4.21



484 Запишите уравнения прямых, если известно, что они имеют один и тот же угловой коэффициент и разные начальные ординаты: $k = \frac{2}{3}$; $l = 0$; 1; 3; -2; -6. Постройте эти прямые в одной системе координат.

485 На рисунке ***4.22*** изображены прямые a, b, c, d и e. У каких из них угловой коэффициент положителен? отрицателен? равен 0?

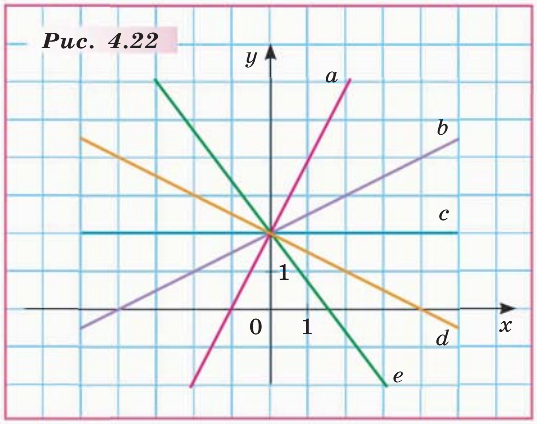


Рис. 4.22

Назовите угловой коэффициент каждой прямой и ординату точки, в которой прямая пересекает ось y, постройте эту прямую (№ 486–487):

486 а) $y = x + 2$; б) $y = x - 1$; в) $y = 2x - 4$; г) $y = \frac{2}{3}x + 2$; д) $y = 0{,}5x - 3$; е) $y = \frac{x}{2} + 1$.

487 а) $y = -x + 3$; б) $y = -x - 1$; в) $y = -\ 2x + 2$; г) $y = 4 - \frac{1}{2}x$; д) $y = -0{,}4x - 2$; е) $y = 6 - 3x$.

488 Запишите уравнение прямой, если известен её угловой коэффициент и точка, в которой прямая пересекает ось y, и постройте эту прямую:
а) $k = 3$, $A\ (0; -3)$; б) $k = -2$, $A\ (0; 1)$; в) $k = 0$, $A\ (0; -4)$.

489 Найдите координаты точек, в которых прямая пересекает ось x и ось y, и постройте эту прямую:
а) $y = 2x - 10$; б) $y = -\frac{2}{3}x + 4$; в) $y = 4x + 2$; г) $y = -\frac{1}{2}x - 1$.

490 Соотнесите каждую из прямых на рисунке ***4.23*** с одним из уравнений:
$y = \frac{1}{2}x$, $y = -x + 1$, $y = 2x - 4$, $y = -\frac{1}{2}x - 4$.

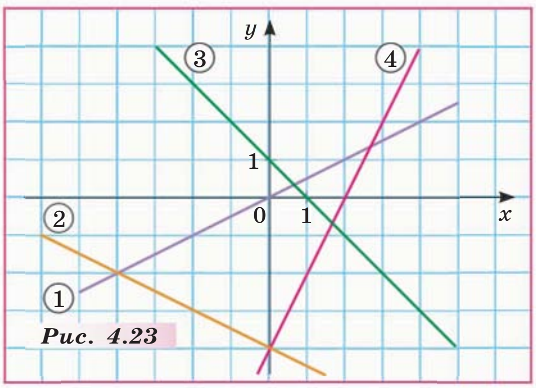


Рис. 4.23

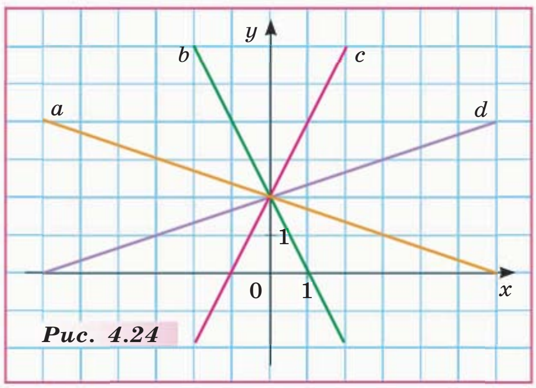


Рис. 4.24

491 Соотнесите каждую из прямых на рисунке ***4.24*** с одним из уравнений:
$y = 2x + 2$, $y = -\frac{1}{3}x + 2$, $y = -2x + 2$, $y = \frac{1}{3}x + 2$.

РАССМАТРИВАЕМ ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ И ПЕРЕСЕКАЮЩИЕСЯ ПРЯМЫЕ

492 а) Прямые заданы уравнениями: $y = -\frac{1}{2}x - 4$, $y = -x - 3$, $y = 4 - x$, $y = 6 + 2x$. Есть ли среди них параллельные прямые? Назовите их и постройте в одной системе координат.

б) Есть ли среди прямых, заданных уравнениями $3y - x = 0$, $y - 3x = 0$, $y = \frac{1}{3}x - 1$, $y = \frac{x + 6}{3}$ параллельные прямые? Если есть, постройте их в одной системе координат.

493 Определите, пересекаются ли данные прямые; если пересекаются, то постройте эти прямые и укажите координаты точки пересечения; проверьте результат, подставив найденные координаты в уравнения:

а) $y = 2x - 5$ и $y = 2x + 5$; в) $y = -\frac{1}{2}x + 3$ и $y = x + 3$;

б) $y = -x + 1$ и $y = 3x + 9$; г) $y = -\frac{1}{3}x + 1$ и $y = -\frac{1}{3}x + 3$.

494 Определите, параллельны или пересекаются прямые; параллельные прямые постройте:
1) $x - 2y = 14$ и $x + 2y = 3$; 2) $6x + 2y = 3$ и $3x + y = 1$.

495 Запишите уравнение прямой, пересекающей ось y в точке (0; 5) и параллельной прямой: а) $y = 2x - 1$; б) $y = -7x + 4$; в) $2x - 3y = 0$.

496 Запишите уравнение прямой, параллельной прямой $y = -\frac{3}{4}x + 2$ и проходящей через точку: а) (0; −2); б) (0; 100); в) (0; 0).

497 Запишите уравнения прямых, изображённых на рисунке ***4.25, а, б***. *Подсказка.* Начинайте с уравнения прямой, проходящей через начало координат.

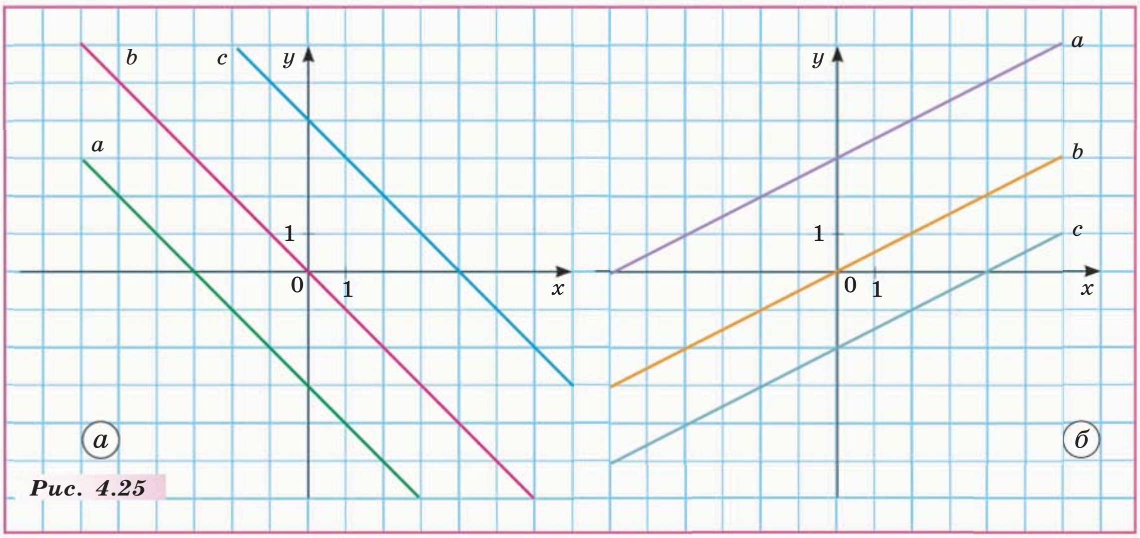


Рис. 4.25

498 Задайте уравнением какую-нибудь прямую, которая проходит:
1) только через I и III координатные четверти;
2) через I, II и III координатные четверти;
3) только через I и II координатные четверти;
4) только через I и IV координатные четверти.

499 Сделав схематический рисунок, определите, в какой координатной четверти находится точка пересечения прямых:

а) $y = -7x + 6$ и $y = -\frac{1}{3}x$; б) $y = 5x - 4$ и $y = -0{,}5x + 8$.

4.4 СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ СПОСОБОМ СЛОЖЕНИЯ

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Что понимают под системой уравнений и что называют решением системы уравнений.
- Как применяется способ сложения для решения системы уравнений.
- Сколько решений может иметь система двух линейных уравнений с двумя переменными.

Пусть две пересекающиеся прямые заданы уравнениями $4x - 3y = 10$ и $2x + 3y = 11$. Каковы координаты точки пересечения? Их можно определить графически, построив прямые в одной координатной плоскости (***рис. 4.26***). Но ответ будет точным, только если это «хорошая» точка — с целыми координатами. Если же координаты дробные, как в этом случае, то ответ может быть лишь приближённым. Однако найти точные координаты возможно, для этого существует метод *вычисления* значений x и y, удовлетворяющих обоим уравнениям.

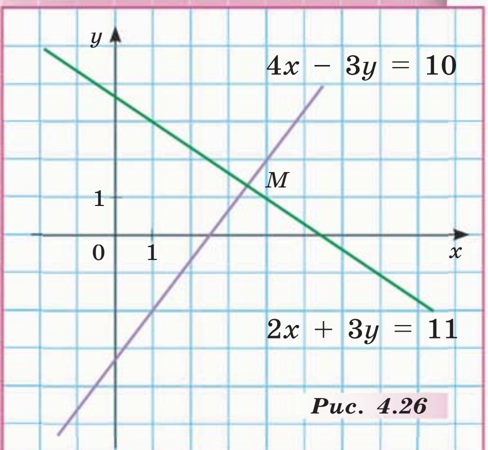


Рис. 4.26

ПОНЯТИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ Точка M пересечения прямых $4x - 3y = 10$ и $2x + 3y = 11$ принадлежит обеим прямым (***рис. 4.26***), поэтому её координаты должны удовлетворять одновременно двум данным уравнениям. Таким образом, наша задача состоит в том, чтобы найти общее решение уравнений $4x - 3y = 10$ и $2x + 3y = 11$. Во всех случаях, когда требуется найти общие решения двух или более уравнений, говорят, что требуется решить *систему уравнений*. Так, в данном случае мы должны решить систему двух линейных уравнений $4x - 3y = 10$ и $2x + 3y = 11$. Символически систему уравнений обозначают так:

$$\begin{cases} 4x - 3y = 10, \\ 2x + 3y = 11. \end{cases}$$

! Пара чисел, которая является решением каждого из уравнений с двумя переменными, входящих в систему, называется *решением системы*.
Решить систему уравнений — это значит найти все её решения или убедиться в том, что их нет.

Для того чтобы вычислить координаты точки пересечения прямых, мы перевели задачу с геометрического языка на алгебраический. Возможность формулировать одни и те же утверждения и на геометрическом, и на алгебраическом языках даёт нам система координат, изобретение которой принадлежит Рене Декарту. Преимуществом геометрического языка является его наглядность. Зато алгебраический язык позволяет сводить задачу к вычислениям. В силу этого он, в частности, более приспособлен для передачи функций человека компьютеру.

СПОСОБ СЛОЖЕНИЯ Из геометрических соображений мы уже знаем, что рассматриваемая система уравнений

$$\begin{cases} 4x - 3y = 10, \\ 2x + 3y = 11 \end{cases}$$

имеет единственное решение. Чтобы найти его, исключим одну из переменных, поступив следующим образом.

Сложим левые части уравнений и их правые части (при этом воспользуемся очевидным свойством числовых равенств: если $a = b$ и $c = d$, то $a + c = b + d$). Коэффициенты при y — противоположные числа, поэтому при сложении y исчезнет, получится уравнение с одной переменной x:

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 4x - 3y = 10 \\ 2x + 3y = 11 \end{array} \\ \hline 6x + 0 = 21,\ 6x = 21. \end{array}$$

Из полученного уравнения найдём x: $x = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$.

Подставим это значение в любое из уравнений системы, например, во второе, и найдём y:

$$2 \cdot \frac{7}{2} + 3y = 11,\ 3y = 11 - 7,\ 3y = 4,\ y = \frac{4}{3}.$$

Решение системы — пара чисел $x = \frac{7}{2}$ и $y = \frac{4}{3}$. Эта пара и является координатами точки пересечения прямых $4x - 3y = 10$ и $2x + 3y = 11$.

Показанный способ решения системы уравнений называют *способом сложения*. Он основан на следующем утверждении:

! Любое уравнение системы можно заменить уравнением, полученным путём сложения (или вычитания) левых и правых частей уравнений, входящих в систему; при этом получится система уравнений, имеющая те же решения, что и исходная.

Решая систему $\begin{cases} 4x - 3y = 10, \\ 2x + 3y = 11, \end{cases}$ мы заменили её системой $\begin{cases} 4x - 3y = 10, \\ 6x = 21, \end{cases}$ в которой второе уравнение получено в результате сложения исходных уравнений.

Пример 1. Решим систему уравнений $\begin{cases} 3x + 4y = 5, \\ 5x - 3y = -11. \end{cases}$

Преобразуем уравнения так, чтобы можно было исключить одну из переменных — x или y. Сделаем, например, коэффициенты при y противоположными числами. Для этого умножим первое уравнение на 3, а второе на 4. Получим

$$\begin{cases} 9x + 12y = 15, \\ 20x - 12y = -44. \end{cases}$$

Сложим левые и правые части уравнений, получим уравнение $29x = -29$, откуда $x = -1$.

Подставим $x = -1$ в уравнение $3x + 4y = 5$, найдём y:

$$3 \cdot (-1) + 4y = 5;\ 4y = 8;\ y = 2.$$

Ответ: $x = -1$, $y = 2$.

Записать ответ можно и другими способами:

— *в виде пары чисел* $(-1; 2)$;

— *в виде системы* $\begin{cases} x = -1, \\ y = 2. \end{cases}$

Подведём итог. При решении системы двух уравнений с двумя переменными способом сложения поступают следующим образом:

Рене Декарт
1596–1650
Французский философ, математик, физик и физиолог

Памятник Рене Декарту в городе Декарте, Франция. В этом городе (изначально Ла-Э-ан-Турен) 31 марта 1596 г. родился великий философ и математик. Имя Декарта город носит с 1802 г.

- преобразовывают одно или оба уравнения системы так, чтобы коэффициенты при одной из переменных стали противоположными числами;
- складывают левые и правые части уравнений;
- решают получившееся уравнение с одной переменной;
- находят соответствующие значения другой переменной.

ГРАФИЧЕСКАЯ ИЛЛЮСТРАЦИЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Рассмотренные выше системы двух линейных уравнений с двумя переменными имели единственное решение. Геометрической интерпретацией таких систем является пара пересекающихся прямых — например, как на рисунке ***4.26*** (с. 130). Однако две прямые, как вам известно, могут оказаться параллельными или даже совпасть. Поэтому при решении систем линейных уравнений возможны и другие случаи.

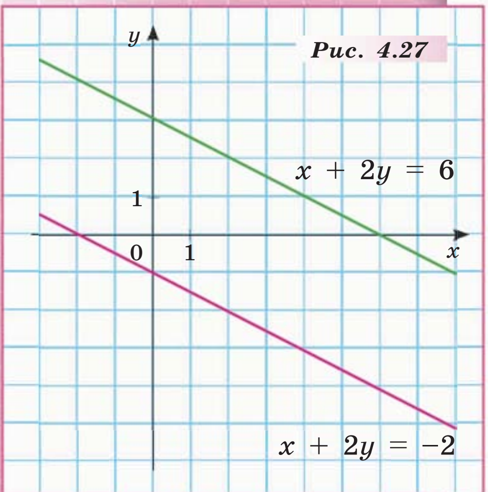


Рис. 4.27

Пример 2. Решим систему уравнений $\begin{cases} x + 2y = 6, \\ x + 2y = -2. \end{cases}$

Сразу видно, что эта система *не имеет решений*: левые части уравнений одинаковы, а правые различны, поэтому нет таких значений x и y, которые удовлетворяли бы одновременно и первому, и второму уравнениям.

На рисунке ***4.27*** эта ситуация иллюстрируется графически. Прямые $x + 2y = 6$ и $x + 2y = -2$ параллельны. Нет ни одной точки, принадлежащей одновременно обоим графикам.

Решая эту систему способом сложения, получим числовое равенство $0 = 8$, которое неверно. Это означает то же самое: система уравнений решений не имеет.

Пример 3. Решим систему уравнений $\begin{cases} 4x - y = 6, \\ 8x - 2y = 12. \end{cases}$

Разделим обе части второго уравнения на 2, получим систему $\begin{cases} 4x - y = 6, \\ 4x - y = 6. \end{cases}$ Она состоит из двух одинаковых уравнений. С геометрической точки зрения это две совпадающие прямые (***рис. 4.28***).

Любое решение уравнения $4x - y = 6$ служит решением данной системы уравнений, значит, она имеет бесконечное множество решений. Записать множество решений этой системы можно так: x — любое число, $y = 4x - 6$.

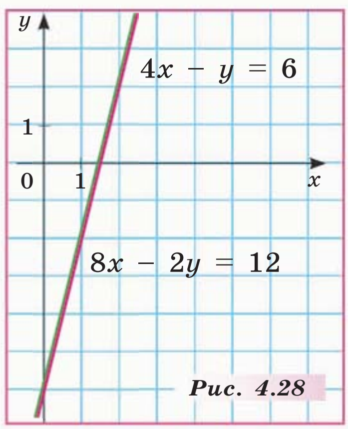


Рис. 4.28

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- В каких случаях говорят, что надо решить систему уравнений?
- Что называется решением системы двух уравнений с двумя переменными? Убедитесь в том, что пара (10; 2) является решением системы уравнений $\begin{cases} x - 6y = -2, \\ 2x - 5y = 10. \end{cases}$ Дайте геометрическое истолкование этого факта.
- Решите систему уравнений $\begin{cases} x - 6y = -2, \\ 2x - 5y = 10, \end{cases}$ прокомментируйте каждый шаг.
- Сколько решений может иметь система двух линейных уравнений с двумя переменными? Для каждого случая найдите соответствующий пример в объяснительном тексте.

УПРАЖНЕНИЯ

ПОНЯТИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

500 Запишите систему уравнений, с помощью которой можно вычислить координаты точки пересечения прямых (*рис. 4.29, а–г*). Определите с помощью графиков её решение; сделайте проверку, подставив найденные значения x и y в уравнения системы.

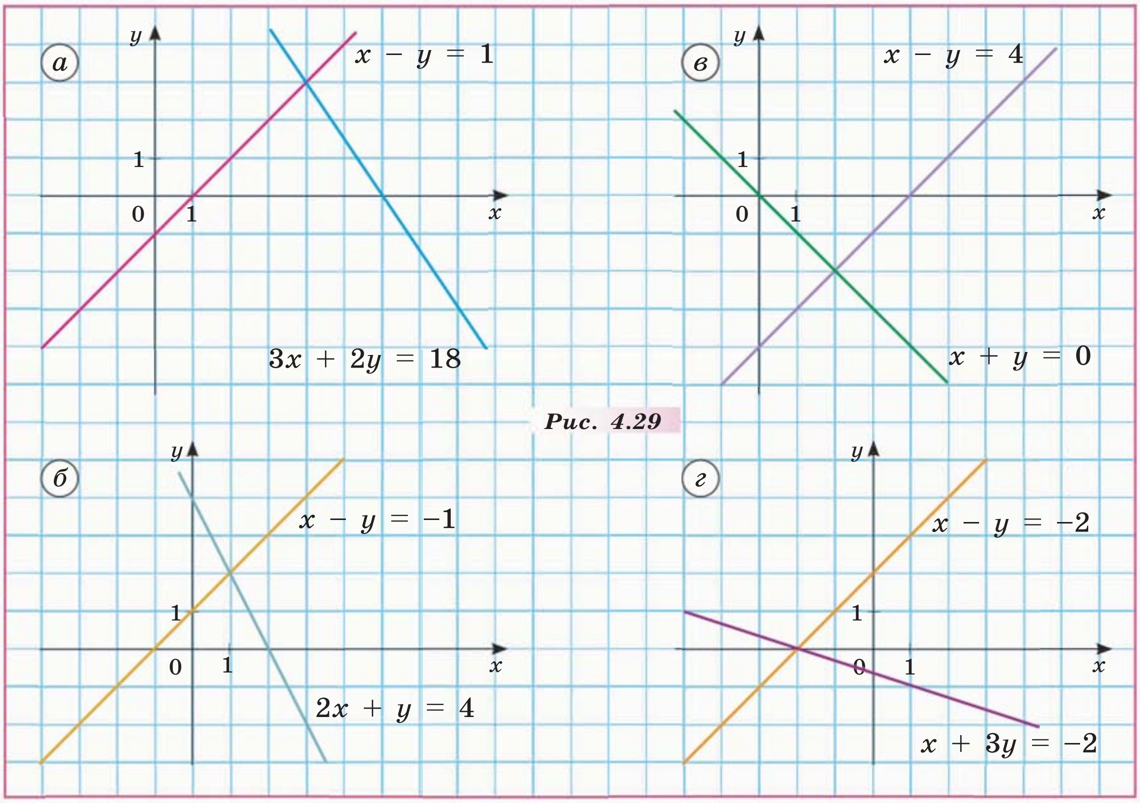


Рис. 4.29

501 На рисунке ***4.30*** изображены прямые, проходящие через точку (2; 4). Какие системы двух уравнений с двумя переменными, имеющие решением пару чисел (2; 4), можно составить по этому рисунку? Запишите их все.

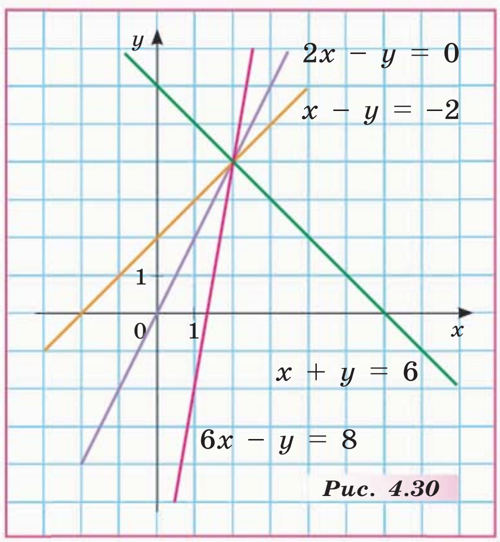


Рис. 4.30

502 Является ли пара чисел (2; 8) решением системы уравнений:

а) $\begin{cases} 10x - y = 12, \\ x - y = 6; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 7x - 2y = -2, \\ y - x = 6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x + y = 14, \\ x + 2y = 18; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x - 3y = 2, \\ 3x - 5y = 14? \end{cases}$

РЕШАЕМ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

503 Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x + y = 15, \\ x - y = 9; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 5x - 2y = 0{,}1, \\ -5x - 4y = 0{,}5; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x + 2y = -25, \\ 3x + 2y = -5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + 3y = 18, \\ 2x - 3y = 3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x + y = 5{,}4, \\ x + y = 6{,}4; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x - 3y = 5, \\ 5x - 3y = 11. \end{cases}$

504 Решите систему уравнений двумя способами, исключив сначала одну переменную, а затем другую. Получился ли одинаковый ответ?

а) $\begin{cases} x + y = 5, \\ 3x - 5y = -1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} a - 4b = 2, \\ 3a - 2b = 16; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3p - 2q = 10, \\ 9p + 4q = 40; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x - 3y = 5, \\ x - 6y = -2. \end{cases}$

Решите систему уравнений (№ 505–507):

505 а) $\begin{cases} 2x - 5y = 0, \\ 6x + y = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x + y = 30, \\ 3x - 4y = 41; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x - 2y = 5, \\ x - 4y = 6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x - 4y = 2, \\ 9x - 5y = 7. \end{cases}$

506 а) $\begin{cases} 3x + 5y = 4, \\ 2x - 3y = 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2a + 3b = 6, \\ 3a + 5b = 8; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 6x - 7z = 6, \\ 7x - 8z = 15; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2k + 5l = 12, \\ 4k + 3l = 10. \end{cases}$

507 а) $\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 2, \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 2, \\ -\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{2}{3}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x - \frac{y}{2} = 14, \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{8} = 7; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{3x}{2} - \frac{2y}{3} = 6, \\ \frac{3x}{4} - \frac{y}{3} = 12. \end{cases}$

Образец. а) Сначала избавимся от дробей, умножив обе части первого уравнения на 6, а второго на 4, получим $\begin{cases} 3x - 2y = 12, \\ x + 2y = 20. \end{cases}$ Доведите решение системы уравнений до конца. Проверьте себя, подставив полученные значения x и y в исходную систему.

508 а) $\begin{cases} 7(x + y) = 28, \\ 3(x - y) = 33; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{1}{3}(x - y) = 5, \\ \frac{1}{5}(x + y) = 2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 0{,}6(x - y) = 4{,}2, \\ 0{,}3(x + y) = 1{,}5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{2}{3}(x + y) = \frac{4}{3}, \\ \frac{3}{4}(x - y) = \frac{3}{2}. \end{cases}$

Совет. При решении каждой системы сначала упростите уравнения, входящие в систему, — разделите (или умножьте) обе части уравнения на одно и то же число.

ПРИМЕНЯЕМ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

509 Вычислите координаты точки пересечения прямых:
а) $2x + 5y = -7$ и $3x - y = 15$;
б) $2x + y = -5$ и $x - 3y = -6$;
в) $6x + y - 5 = 0$ и $2x - 3y + 5 = 0$;
г) $y = 3x - 15$ и $y = 2x + 6$.

510 а) Найдите два числа, сумма которых равна -2, а разность равна 34.
б) Найдите два числа, если известно, что их сумма равна 290 и одно из них на 60 меньше другого.

511 а) Существуют ли два целых числа, таких, что их сумма равна 16, а разность равна 7?
б) Докажите, что не существует двух таких натуральных чисел, сумма которых равна 19 и одно из которых на 6 больше другого.

ИССЛЕДУЕМ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

512 Используя рисунок **4.31**, определите, имеет ли решение система уравнений, и если имеет, то найдите его:

1) $\begin{cases} 3y - 5x = 7, \\ x + y = -3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x + y = -3, \\ x + y = 5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + y = 5, \\ 3y - 5x = 7. \end{cases}$

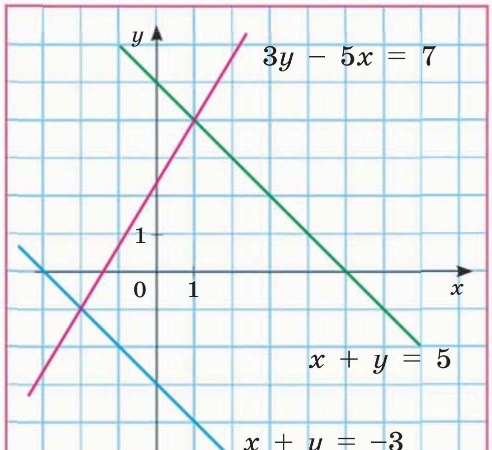


Рис. 4.31

513 Используя графические представления, определите, имеет ли решение система уравнений и если имеет, то сколько:

а) $\begin{cases} y = 2x - 7, \\ y = -2x + 4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 1, \\ y = \frac{1}{2}x + 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x - y = 2, \\ y = 3x - 2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x - y = 1, \\ 3x - y = 1. \end{cases}$

514 Объясните, почему система уравнений не имеет решений или имеет бесконечное множество решений (в последнем случае запишите ответ и приведите примеры решений системы):

а) $\begin{cases} x + y = 5, \\ x + y = 4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + y = 4, \\ 2x + 2y = 8; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 3x + y = 1, \\ 6x + 2y = 12; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x - 3y = 6, \\ x - 3y = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x - y = 5, \\ 9x - 3y = 15; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x + 4y = 2, \\ 0{,}5x + y = 0{,}5. \end{cases}$

515 Дано одно из двух уравнений системы: $y = 0{,}5x - 2$. Подберите из приведённых ниже уравнений такие, чтобы полученная система: а) не имела решения; б) имела единственное решение; в) имела бесконечное множество решений.

$$2y - x = 1;\ 2y + x = 0;\ x - 2y = 4;\ 2y - x + 4 = 0;\ 2x - y = 2.$$

516

ЗАДАЧА-ИССЛЕДОВАНИЕ

1) а) Убедитесь в том, что графической моделью системы уравнений $\begin{cases} 3x + 12y = 15, \\ x + 4y = 5 \end{cases}$ являются совпадающие прямые. Найдите отношения коэффициентов при x, при y и свободных членов. Сравните их. б) Выполните те же задания для системы $\begin{cases} 5x - 15y = 40, \\ 2x - 6y = 16. \end{cases}$ Как вы считаете, по какому признаку можно определить, что система имеет бесконечно много решений?

2) а) Убедитесь в том, что графической моделью системы уравнений $\begin{cases} 4x + 2y = 6, \\ 6x + 3y = 3 \end{cases}$ являются параллельные прямые. Найдите отношения коэффициентов при x, при y и свободных членов. Сравните их.

б) Выполните те же задания для системы $\begin{cases} 8x - 4y = 4, \\ 4x - 2y = 3. \end{cases}$ Как вы считаете, по какому признаку можно определить, что система не имеет решений?

3) Составьте сами систему уравнений, имеющую бесконечное множество решений, и систему уравнений, не имеющую решений.

4.5 РЕШЕНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ СПОСОБОМ ПОДСТАНОВКИ

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- В чём состоит способ подстановки решения системы уравнений.
- Какая линия является графиком уравнения $x^2 + y^2 = r^2$.

Рассмотрим ещё один способ решения систем уравнений. Овладев им, вы будете иметь выбор и использовать тот, который будет предпочтительнее лично для вас или окажется проще для решения конкретной системы.

КАК ПРИМЕНЯЮТ СПОСОБ ПОДСТАНОВКИ

Пример 1. Решим систему уравнений $\begin{cases} 3x + 2y = 12, \\ 2x + y = 7. \end{cases}$

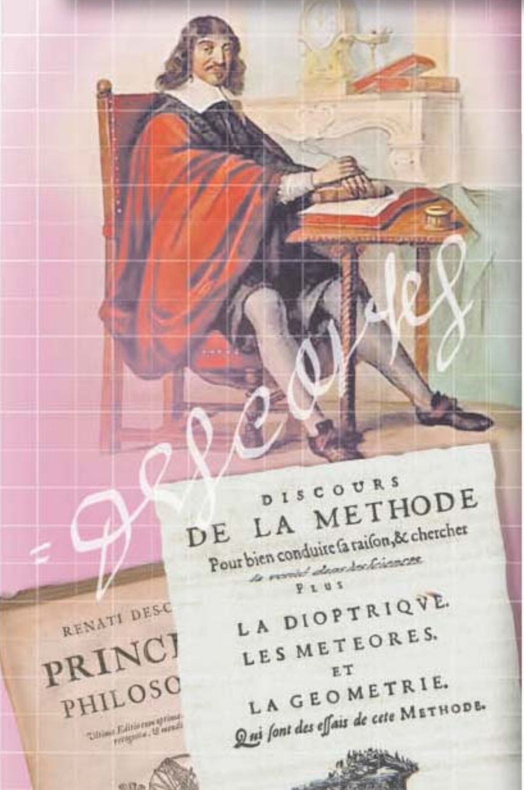
Выразим из второго уравнения y через x:	$y = 7 - 2x$
Подставим $7 - 2x$ вместо y в первое уравнение системы:	$\begin{cases} 3x + 2(7 - 2x) = 12, \\ y = 7 - 2x \end{cases}$
Решим полученное уравнение с одной переменной, найдём x:	$3x + 2(7 - 2x) = 12$ $3x + 14 - 4x = 12$ $x = 2$
Из уравнения $y = 7 - 2x$ найдём y:	$y = 7 - 2\cdot 2$ $y = 3$
Ответ: (2; 3).	

Способ, которым мы воспользовались для решения системы, называется *способом подстановки*. При решении системы двух уравнений с двумя переменными способом подстановки поступают следующим образом:

- выражают из какого-либо уравнения системы одну переменную через другую;
- подставляют полученное выражение в другое уравнение системы вместо соответствующей переменной;
- решают получившееся уравнение с одной переменной;
- находят соответствующие значения другой переменной.

Теперь вам известны два алгебраических способа решения систем уравнений. В каждом конкретном случае полезно думать о том, какой из них предпочтительнее. Например, систему уравнений $\begin{cases} 2x + 3y = 3, \\ 5x + 6y = 9 \end{cases}$ удобнее решать способом сложения, так как при выражении одной переменной через другую получатся дроби. А система уравнений $\begin{cases} 2x - 3y = 11, \\ 5x + y = 2 \end{cases}$ достаточно просто решается любым из рассмотренных способов.

К значительным достижениям Рене Декарта относят переработку им математической символики, созданной Виетом ещё в XVI в. Со времён Декарта она стала близка к современной. Коэффициенты он стал обозначать $a, b, c, \ldots$, а неизвестные — x, y, z; ввёл современную запись натурального показателя степени, черту в знаке радикала над подкоренным выражением и многое другое, используемое нами и сейчас. Декарт придавал огромное значение символической алгебре; он называл её «всеобщей математикой», и писал, что она призвана объяснить «всё относящееся к порядку и мере».



ПРИМЕРЫ БОЛЕЕ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ Вам придётся решать и более сложные системы, в которых только одно из уравнений линейное. Такие системы решаются, как правило, способом подстановки.

Пример 2. Решим систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ 2x - y = 3. \end{cases}$

Выразим из линейного уравнения y через x:	$y = 2x - 3$
Выполним подстановку, получим систему:	$\begin{cases} x^2 + (2x - 3)^2 = 9, \\ 2x - y = 3 \end{cases}$
Решим уравнение с одной переменной:	$x^2 + 4x^2 - 12x + 9 = 9$ $5x^2 - 12x = 0$ $x(5x - 12) = 0$ $x_1 = 0;\ x_2 = 2{,}4$
Для каждого значения x найдём соответствующее значение y:	$y_1 = 2 \cdot 0 - 3 = -3,$ $y_2 = 2 \cdot 2{,}4 - 3 = 1{,}8$
Получили два решения:	$\begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = -3 \end{cases}$ и $\begin{cases} x_2 = 2{,}4, \\ y_2 = 1{,}8 \end{cases}$

Ответ: (0; −3); (2,4; 1,8).

Чтобы выяснить, как выглядит графическая интерпретация рассмотренной системы уравнений, надо выяснить, что представляет собой график уравнения $x^2 + y^2 = 9$. Пусть $M\ (a;\ b)$ — произвольная точка графика уравнения $x^2 + y^2 = 9$ (**рис. 4.32, а**). Это означает, что пара чисел $(a;\ b)$ — решение уравнения $x^2 + y^2 = 9$, т. е. верно равенство $a^2 + b^2 = 9$.

Найдём расстояние от точки M до начала координат. По теореме Пифагора $OM^2 = a^2 + b^2$. А так как $a^2 + b^2 = 9$, то $OM^2 = 9$ и $OM = 3$. Если точка M лежит на координатной оси, то OM также равно 3.

Получаем, что любая точка графика уравнения $x^2 + y^2 = 9$ находится на одном и том же расстоянии от точки O — начала координат. Это расстояние равно 3 единицам. А это означает, что график рассматриваемого уравнения — окружность с центром в начале координат и с радиусом, равным 3 (**рис. 4.32, б**). Вообще

> **!** график уравнения $x^2 + y^2 = r^2$, где r — положительное число, есть окружность с центром в начале координат и радиусом r.

Начертим в одной системе координат окружность $x^2 + y^2 = 9$ и прямую $y = 2x - 3$ (**рис. 4.33**). Они пересекаются в двух точках. Это и есть геометрическое выражение того факта, что система имеет два решения. Каждое решение — это координаты одной из точек пересечения графиков.

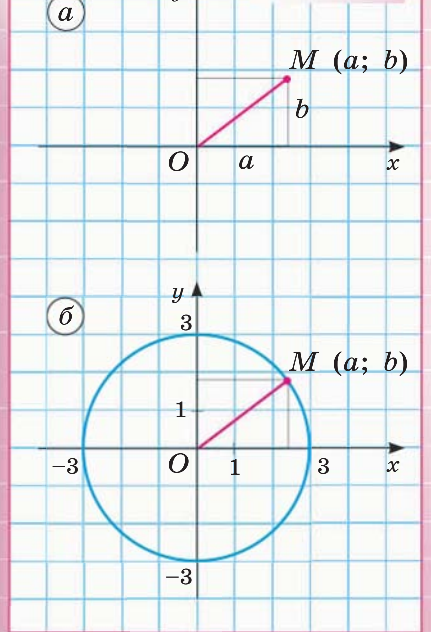


Рис. 4.32

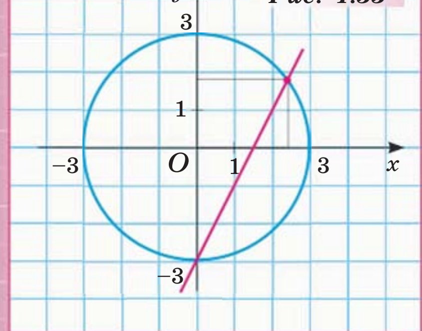


Рис. 4.33

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Решите систему уравнений способом подстановки и прокомментируйте каждый шаг решения:
  а) $\begin{cases} 3x + y = 4, \\ 2x - 5y = -3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = 4, \\ x^2 - y = 2. \end{cases}$
- Что представляет собой график уравнения $x^2 + y^2 = 4$? Сделайте рисунок.
- С помощью схематического рисунка определите, имеет ли система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = x - 1 \end{cases}$ решения и если имеет, то сколько.

УПРАЖНЕНИЯ

РЕШАЕМ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

517 Выразите из уравнения сначала одну переменную, а затем другую:
а) $x - y = 7$; б) $a + b = 1$; в) $3x - y = 0$; г) $a - 2b = 0$; д) $2x + 3y = 6$.

Решите систему уравнений способом подстановки (№ 518–519):

518 а) $\begin{cases} 2x + y = 15, \\ y = 3x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = x - 2, \\ 3x + y = 6; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = y, \\ 2x - 5y = -12; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x - 3y = 15, \\ x = 2y + 7. \end{cases}$

519 а) $\begin{cases} x + 2y = 6, \\ x + 3y = 14; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x - 2y = 0, \\ 2x - y = 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x + y = 5, \\ 4x + 3y = 6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x - 5y = 8, \\ x + y = 4. \end{cases}$

520 Решите систему уравнений, применив любой из двух известных вам способов:
а) $\begin{cases} 3x + 4y = 7, \\ 2x + y = 8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 2y = 3, \\ 5x + y = 4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 5x + 2z = 15, \\ 8x + 3z = -1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x - 3z = 11, \\ 5x - 4z = 3. \end{cases}$

521 Вычислите координаты точек A, B и C (**рис. 4.34**, *а–в*):

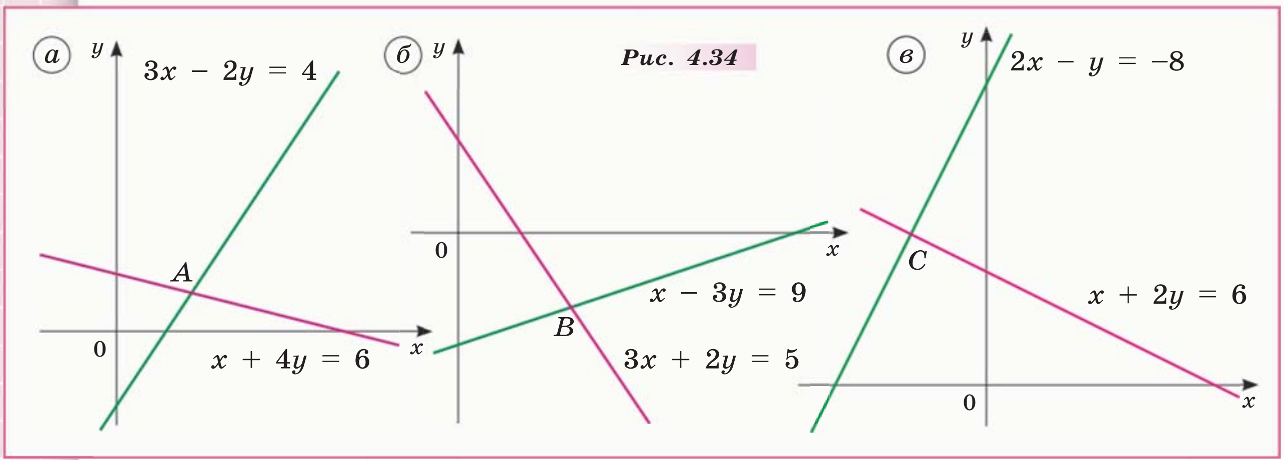


Рис. 4.34

522 В какой координатной четверти находится точка пересечения прямых:
а) $y = -8x + 30$ и $y = 5x - 35$;
б) $x + 5y = -7$ и $3x + 2y = 5$;
в) $3x + y = -5$ и $2x - 5y = 8$;
г) $2x - y = 0$ и $7x - 3y = 5$?

523 Решите систему уравнений:
а) $\begin{cases} \dfrac{y}{5} + \dfrac{x + y}{3} = -2, \\ \dfrac{2x - y}{3} = \dfrac{3x}{4} + \dfrac{3}{2}; \end{cases}$
б) $\begin{cases} \dfrac{2x}{3} = \dfrac{x + y}{2} - \dfrac{5}{2}, \\ 2x + \dfrac{3y}{2} = 0; \end{cases}$
в) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} = x - y, \\ 2(x + y) - 2(x - y) - 3 = 2x + y; \end{cases}$
г) $\begin{cases} \dfrac{x - y}{2} - \dfrac{x + y}{3} = \dfrac{x}{6} + 1, \\ 3(x - y) - 2(x + y) = 2x - 2y. \end{cases}$

524 Решите систему способом подстановки:
а) $\begin{cases} x = 30z, \\ y = 40z, \\ x + y = 210; \end{cases}$ б) $\begin{cases} a = 4b, \\ c = -5b, \\ a + 4c = 40; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = z + 1, \\ y = 2z - 1, \\ x - y = 3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} a = 4c - 3, \\ b = c - 5, \\ a - 3b = 10. \end{cases}$

525 Решите систему уравнений: а) $\begin{cases} x + y = -2, \\ y + z = 4, \\ z + x = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ y + z + u = 5, \\ z + u + x = 6, \\ u + x + y = 1. \end{cases}$

Подсказка. а) Сложите все уравнения системы и в полученное уравнение подставьте поочерёдно значения $x + y$, $y + z$ и $z + x$.

526 а) Найдите все пары натуральных чисел, удовлетворяющие уравнению

$$x^2 - y^2 = 64.$$

Подсказка. Разложите на множители левую часть уравнения: $(x - y)(x + y) = 64$. Числа $x - y$ и $x + y$ — натуральные, и их произведение равно 64. Поэтому можно найти все пары натуральных чисел, дающих в произведении 64, и составить соответствующие системы уравнений. Полезно при этом учесть, что $x > y$ и $x - y < x + y$.

б) Найдите все пары натуральных чисел, удовлетворяющие уравнению $x^2 - y^2 = 15$.

РЕШАЕМ СИСТЕМЫ, В КОТОРЫХ ТОЛЬКО ОДНО УРАВНЕНИЕ ЛИНЕЙНОЕ

527 Окружность и прямая заданы уравнениями. Найдите координаты их точек пересечения и проиллюстрируйте результат графически:

а) $x^2 + y^2 = 25$ и $y = \frac{3}{4}x$;

б) $x^2 + y^2 = 20$ и $x + y = 6$;

в) $x^2 + y^2 = 16$ и $x - y = 0$.

528 На рисунке *4.35* изображена окружность, заданная уравнением $x^2 + y^2 = 10$, и две прямые. Составьте две системы, в каждой из которых одним из уравнений является уравнение $x^2 + y^2 = 10$. Используя рисунок, найдите решения каждой системы. Проверьте себя, подставив полученные числа, точные решения вы получили или приближённые.

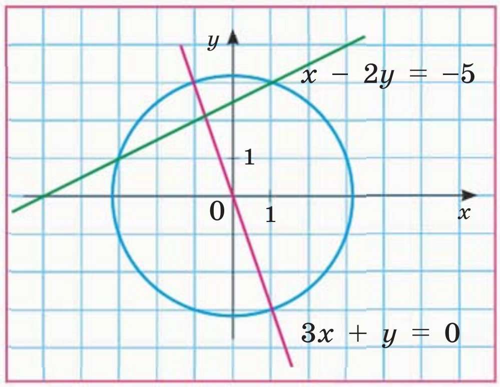


Рис. 4.35

529 Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x + y = 12, \\ xy = 32; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x - y = 4, \\ xy = 12; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y = x + 2, \\ 4y + x^2 = 8; \end{cases}$

г) $\begin{cases} y^2 + 2x - 4y = 0, \\ 2y - x = 2; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x - y = 2, \\ 3x - y^2 = 6; \end{cases}$

е) $\begin{cases} x + y^2 = 16, \\ 2x - y = 11. \end{cases}$

530 Пересекаются ли парабола и прямая? Если да, то найдите координаты их точек пересечения. Проиллюстрируйте свой результат графически.

а) $y = x^2$ и $x + y = 2$;

б) $y = -x^2$ и $y = -2x - 3$;

в) $y = x^2$ и $y = x - 5$;

г) $y = -x^2$ и $x - y = 1$.

531 Решите систему уравнений: а) $\begin{cases} x^2 + 2x + y^2 = 16, \\ x + y = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 6y = -6, \\ x + 2y = 3. \end{cases}$

4.6 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Как умение решать системы уравнений применяется для решения задач алгебраическим способом.

Когда вы решаете задачу алгебраическим способом, то составляете уравнение; его решение позволяет найти ответ на вопрос задачи. Теперь для перевода условия задачи на математический язык вы можете использовать не только уравнение с одной переменной, но и систему уравнений.

СОСТАВЛЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПО УСЛОВИЮ ЗАДАЧИ

В рассказе А. П. Чехова «Репетитор» гимназист, давая урок двенадцатилетнему Пете Удодову, предложил ему решить такую задачу:

«Купец купил 138 аршин чёрного и синего сукна за 540 р. Спрашивается, сколько аршин он купил того и другого, если синее стоило 5 р. за аршин, а чёрное 3 р.»

Тот, кто читал этот рассказ, знает, что учитель запутался, пытаясь решить эту задачу арифметическим путём. А отец Пети решил её очень быстро, на русских счётах. Возможно, он рассуждал так:

«Если бы всё сукно стоило по 3 р. за аршин, то купец заплатил бы $3 \cdot 138 = 414$ (р.). Но он заплатил на $540 - 414 = 126$ (р.) больше, так как аршин синего сукна стоил на 2 р. дороже. Значит, было куплено $126 : 2 = 63$ (аршина) синего сукна и $138 - 63 = 75$ (аршин) чёрного сукна».

Горе-репетитор, оправдываясь, заявил: «Эта задача, собственно говоря, алгебраическая. Её с иксом и игрэком решить можно».

Решим и мы эту задачу, составив по её условию систему уравнений. Для этого введём две переменные.

Пусть купец купил x аршин синего сукна и y аршин чёрного. Так как всего было куплено 138 аршин, то $x + y = 138$.

Теперь составим второе уравнение: за синее сукно купец заплатил $5x$ р., а за чёрное — $3y$ р., всего купец заплатил 540 р., поэтому $5x + 3y = 540$.

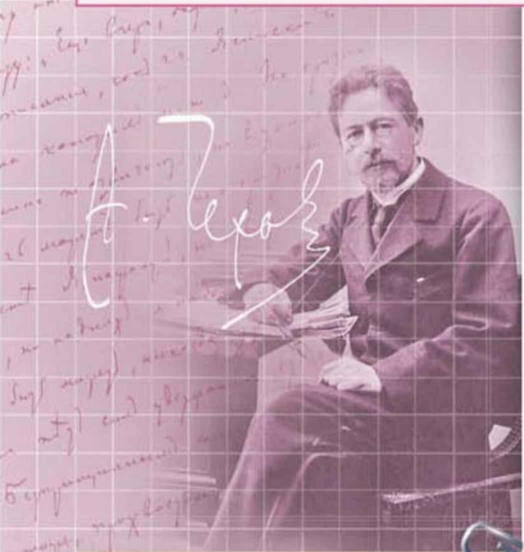
Таким образом, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 138, \\ 5x + 3y = 540. \end{cases}$$

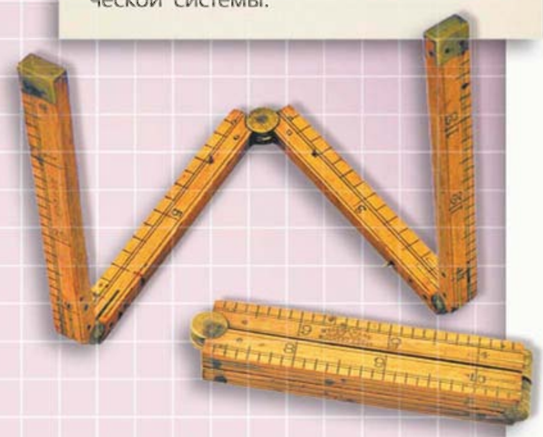
Решив её, найдём: $x = 63$, $y = 75$.

Мы получили уже известный нам ответ: купец купил 63 аршина синего сукна и 75 аршин чёрного.

По условию этой задачи можно было бы составить уравнение с одной переменной. Однако составить систему уравнений с двумя переменными в данном случае значительно проще. И так бывает при решении многих задач, в чём вы и убедитесь далее.



Аршин – старинная русская мера длины, равная в современном исчислении 0,7112 м. Аршином также называли мерную линейку, на которую обычно наносили деления в вершках. В одном аршине 16 вершков. Это соотношение стало официальным после Указа 1835 г., которым была узаконена разработанная к тому времени научно построенная система основных российских мер. Указ действовал до введения метрической системы.



Задача 1. Клиент банка распределил некоторую сумму денег на два разных вклада: один с доходом 8 % в год, другой — 6 % в год. Общий годовой доход составил 6800 р. Если бы, однако, он поменял местами внесённые суммы, то годовой доход составил бы 7200 р. Какая сумма внесена в банк?

Решение. Пусть внесённая в банк сумма распределена на две части — x р. и y р. Тогда общая сумма равна $(x + y)$ р.

Составим таблицу.

Процентная ставка, %	8 %	6 %
Величина вклада, р.	x	y
Доход по вкладу, р.	$0{,}08x$	$0{,}06y$
Величина вклада, р.	y	x
Доход по вкладу, р.	$0{,}08y$	$0{,}06x$

Имеем систему

$$\begin{cases} 0{,}08x + 0{,}06y = 6800, \\ 0{,}06x + 0{,}08y = 7200. \end{cases}$$

Теперь можно приступить к нахождению значений x и y, но в данном случае можно поступить иначе. Сложив уравнения системы, получим $0{,}14x + 0{,}14y = 14\,000$, т. е. $x + y = 100\,000$, а это и есть общая сумма вклада.

Ответ: 100 000 р.

ВВЕДЕНИЕ БОЛЕЕ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ Если условие задачи достаточно сложное, то перевод её на алгебраический язык можно упростить введением не одной, а двух и даже большего числа переменных. Вообще говоря, переменных можно вводить столько, сколько требуется. При этом обычно надо составить столько же уравнений.

Задача 2. Места на стадионе расположены в три яруса. Всего арена рассчитана на 31 350 мест. В нижнем ярусе в 3 раза меньше мест, чем в верхнем. В среднем ярусе на 6860 мест больше, чем в нижнем. Сколько мест в каждом ярусе?

Решение. Пусть x мест в нижнем ярусе, y мест в среднем ярусе, z мест в верхнем ярусе.

Составим систему уравнений: $\begin{cases} x + y + z = 31\,350, \\ z = 3x, \\ y = x + 6860. \end{cases}$

Подставив в первое уравнение выражения для z и y из второго и третьего уравнений, получим

$$x + (x + 6860) + 3x = 31\,350, \text{ откуда } x = 4898.$$

Используя уравнения системы, получим y и z:

$$y = 11\,758,\ z = 14\,694.$$

Полезно для самопроверки убедиться, что решение отвечает условию задачи:

$$4898 + 11\,758 + 14\,694 = 31\,350 \text{ (мест).}$$

Ответ: в нижнем ярусе 4898 мест, в среднем ярусе 11 758 мест, в верхнем ярусе 14 694 места.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

Составьте систему уравнений по условию задачи:

- Скорость лодки по течению реки 18 км/ч, а против течения — 15 км/ч. Найдите собственную скорость лодки и скорость течения реки.
- Стоимость карандаша составляет $\frac{2}{3}$ стоимости авторучки, причём ручка на 6 р. дороже карандаша. Сколько стоит ручка и сколько карандаш?
- Яблоко и груша вместе весят 376 г, груша и апельсин — 454 г, яблоко и апельсин — 410 г. Сколько весит каждый фрукт?

УПРАЖНЕНИЯ

СОСТАВЛЯЕМ СИСТЕМУ УРАВНЕНИЙ ПО УСЛОВИЮ ЗАДАЧИ

Составьте систему уравнений по условию задачи, затем решите её (№ 532–535):

532 Артём на выполнение домашней работы по математике затратил на 30 мин больше, чем на домашнее задание по географии. Всего на эти два предмета он затратил 1 ч 40 мин. Сколько времени потребовалось на каждый предмет?

533 Группа туристов отправилась в поход на 12 байдарках. Часть байдарок были двухместные, а часть — трёхместные. Сколько двухместных и сколько трёхместных байдарок использовали в походе, если группа состояла из 29 человек и все места были заняты?

534 В магазине смешали конфеты по 110 р. за килограмм и по 150 р. за килограмм и получили смесь по 120 р. за килограмм. Сколько граммов конфет того и другого сорта содержится в одном килограмме смеси?

535 Туристский маршрут от станции к озеру идёт сначала в гору, а затем с горы. При подъёме туристы идут со скоростью 3 км/ч, а при спуске — 6 км/ч. Путь от станции к озеру занимает 3,5 ч, а обратный путь — 4 ч. Найдите длину маршрута.
Подсказка. Сделайте схематический рисунок и введите переменные для обозначения длины каждого из двух отрезков пути.

РЕШАЕМ ЗАДАЧИ

536 Длина ограды вокруг участка прямоугольной формы равна 140 м. Одна сторона участка на 50 м больше другой. Найдите стороны этого участка.

537 В парке под аттракционы отвели участок прямоугольной формы площадью 720 м^2. Длина ограждения этого участка 108 м. Найдите размеры участка.

538 В кафе в понедельник было продано 56 пирожков и 20 бутылок воды на 872 р., а во вторник — 50 пирожков и 40 бутылок воды на 1000 р. Определите цену одного пирожка и одной бутылки воды.

539 Какая из следующих ситуаций возможна, а какая невозможна?
1) Для двух классов купили одинаковые тетради и шариковые ручки. За 60 тетрадей и 20 ручек для одного класса заплатили 420 р., а за 75 тетрадей и 25 ручек для другого класса заплатили 600 р.
2) В школе 650 учащихся. К концу года число девочек увеличилось на 10 %, а число мальчиков — на 20 %, и всего стало 750 учащихся.

540 В выборах школьного совета участвовало 900 учащихся. За кандидата *A* проголосовало 15 % девочек и 20 % мальчиков, всего 159 учащихся. Сколько девочек и сколько мальчиков участвовало в выборах?

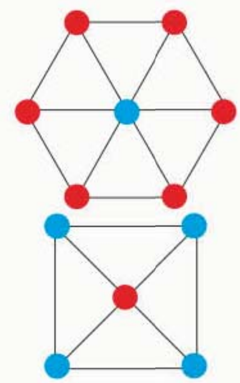
541 Электрочайник на 600 р. дешевле кофеварки, а кофеварка на 30 % дороже электрочайника. Сколько стоит электрочайник и сколько кофеварка?

542 Некоторая сумма денег была помещена в банк на два разных вклада: один с доходом 6 % в год, а другой — 5 % в год. Общий годовой доход составил 5100 р. Если внесённые вклады поменять местами, то годовой доход составит 4800 р. Какая сумма внесена в банк?

543 В колбу налили некоторое количество 60 %-ного раствора соли и некоторое количество 80 %-ного раствора этой же соли. Получили 35 мл раствора, содержащего 72 % соли. Сколько миллилитров каждого раствора налили в колбу?
Решите задачу, используя следующий план:
1) Обозначьте буквами количество 60 %-ного и 80%-ного растворов соли, налитых в колбу.
2) Запишите уравнение, связывающее эти две величины и общее количество раствора.
3) Определите количество соли в этом растворе.
4) Запишите уравнение, связывающее количество соли в 60 %-ном, 80 %-ном и получившемся растворах.
5) Составьте систему и решите её.

544 Для проведения опыта научный сотрудник химической лаборатории смешал 4 %-ный и 10 %-ный растворы некоторого химического вещества и получил 75 мл 8 %-ного раствора этого вещества. Сколько миллилитров 4 %-ного и сколько миллилитров 10 %-ного растворов было взято? (Используйте план задачи 543.)

545 а) Имеется 40 красных фишек и 45 синих. Их раскладывают на плоской поверхности следующим образом: красные фишки образуют вершины правильного шестиугольника, в центр которого кладется синяя фишка, а синие фишки образуют вершины квадрата, в центр которого кладется красная фишка. Существует ли такой способ разложения, при котором все фишки будут использованы? Если существует, то сколько шестиугольников и сколько квадратов получится?
Замечание. Многоугольники не должны иметь общих вершин.
б) Решите эту же задачу для случая, когда имеется 42 красные и 43 синие фишки.



546 Междугородный автобус проехал от одного города до другого за 17 ч. Некоторое время он ехал со скоростью 35 км/ч, а остальную часть пути — со скоростью 55 км/ч. Определите, сколько времени он ехал со скоростью 35 км/ч и сколько со скоростью 55 км/ч, если его средняя скорость была 50 км/ч.
Совет. Вспомните, что средняя скорость движения — это отношение всего пройденного пути ко всему времени движения.

Введите необходимое число переменных и решите задачу (№ 547–548):

547 Матери, дочери и бабушке вместе 105 лет. Матери и дочери вместе 45 лет, а бабушке и внучке вместе 70 лет. Сколько лет каждой?
Подсказка. Введите необходимое число переменных.

548 Для приготовления салата купили помидоры по 40 р. за килограмм, огурцы по 20 р. за килограмм и перец по 70 р. за килограмм. Вся покупка стоила 320 р. Сколько килограммов помидор, огурцов и перца купили, если за огурцы заплатили в 2 раза меньше, чем за помидоры, и на 80 р. меньше, чем за перец?

4.7 ЗАДАЧИ НА КООРДИНАТНОЙ ПЛОСКОСТИ

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Как составить уравнение прямой по некоторым известным параметрам.
- Как решать различные задачи, связанные с прямыми и точками, используя аппарат алгебры.

Вы уже знаете, что с помощью систем уравнений можно определять взаимное расположение прямых на координатной плоскости, находить координаты точки их пересечения. Таким образом, алгебра может работать на геометрию. С помощью уравнений можно решать и другие задачи, связанные с прямыми на координатной плоскости.

СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ

Задача 1. Запишем уравнение прямой, которая параллельна прямой $y = 2x + 1$ и проходит через точку A (5; 4).

Решение. Искомая прямая параллельна прямой $y = 2x + 1$, значит, у неё тот же угловой коэффициент и её уравнение имеет вид $y = 2x + l$. Таких прямых бесконечно много, но через точку A проходит только одна из них (***рис. 4.36***), и нужно найти соответствующий коэффициент l.

Так как точка A (5; 4) принадлежит прямой $y = 2x + l$, то её координаты удовлетворяют данному уравнению. Подставим $x = 5$ и $y = 4$ в уравнение $y = 2x + l$, получим: $4 = 2 \cdot 5 + l$. Отсюда найдём значение l, при котором полученное равенство верно: $l = -6$.

Значит, прямая, параллельная прямой $y = 2x + 1$ и проходящая через точку A (5; 4), задаётся уравнением $y = 2x - 6$.

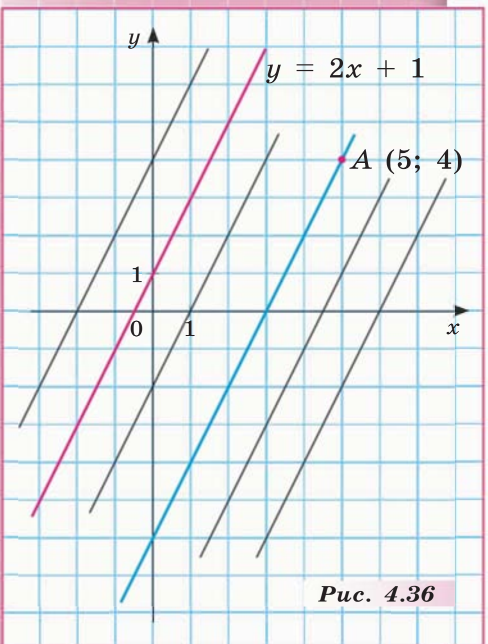


Рис. 4.36

Задача 2. Запишем уравнение прямой, проходящей через точки A (2; 1) и B (−2; 3).

Решение. Будем записывать уравнение прямой в виде $y = kx + l$. Так как точки A и B лежат на искомой прямой, то их координаты удовлетворяют уравнению $y = kx + l$. Подставим координаты каждой из них в данное уравнение, получим равенства

$$1 = k \cdot 2 + l \text{ и } 3 = k \cdot (-2) + l.$$

Таким образом, имеем систему двух уравнений с переменными k и l: $\begin{cases} 1 = k \cdot 2 + l, \\ 3 = k \cdot (-2) + l. \end{cases}$ Перепишем её в более удобном виде: $\begin{cases} 2k + l = 1, \\ -2k + l = 3. \end{cases}$

Решив эту систему, найдём, что $k = -\frac{1}{2}$, $l = 2$. Значит, прямая, проходящая через точки A (2; 1) и B (−2; 3), задаётся уравнением $y = -\frac{1}{2}x + 2$ (***рис. 4.37***). Полезно проконтролировать себя, подставив координаты заданных точек в полученное уравнение, и убедиться, что получаются верные равенства.

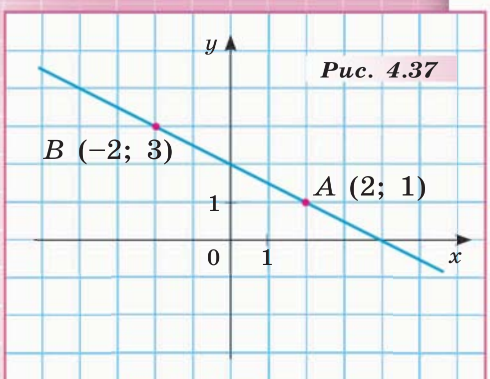


Рис. 4.37

ЗАДАЧИ НА ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ТОЧЕК И ПРЯМЫХ

Задача 3. Выясним, проходят ли прямые $3x - y - 4 = 0$, $2x + y - 6 = 0$ и $2x - y - 2 = 0$ через одну точку.

Решение. Применим такой способ решения: найдём точку пересечения каких-либо двух из данных прямых и проверим, принадлежит ли эта точка третьей прямой.

Возьмём прямые $2x + y - 6 = 0$ и $2x - y - 2 = 0$ и вычислим координаты их точки пересечения. Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + y - 6 = 0, \\ 2x - y - 2 = 0. \end{cases}$$

Получим $x = 2$, $y = 2$.

Итак, прямые $2x + y - 6 = 0$ и $2x - y - 2 = 0$ пересекаются в точке (2; 2).

Подставим найденные координаты точки пересечения прямых в уравнение $3x - y - 4 = 0$, получим

$$3 \cdot 2 - 2 - 4 = 0.$$

Это равенство верно, следовательно, точка с координатами (2; 2) принадлежит также прямой $3x - y - 4 = 0$.

Таким образом, все три данные прямые проходят через одну точку с координатами (2; 2).

На рисунке ***4.38*** эта ситуация изображена графически.

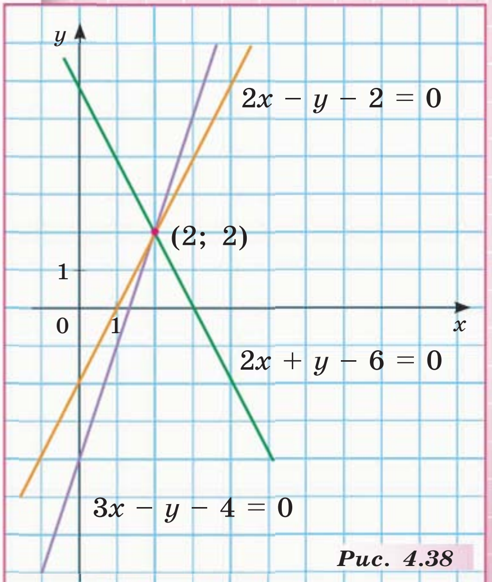


Рис. 4.38

Задача 4. Докажем, что точки A (12; 3), B (14; 7) и C (−5; −31) лежат на одной прямой.

Решение. Поступим следующим образом: составим уравнение прямой, проходящей через какие-либо две из данных трёх точек, например A и B, и убедимся в том, что третья точка C также принадлежит этой прямой.

Для составления уравнения воспользуемся приёмом, рассмотренным в задаче 2.

Запишем уравнение прямой в общем виде: $y = kx + l$. Подставим в это уравнение $x = 12$, $y = 3$ — координаты точки A, получим уравнение с неизвестными k и l:

$$3 = k \cdot 12 + l.$$

Подставим в уравнение $y = kx + l$ координаты точки B, т.е. $x = 14$, $y = 7$. Получим второе уравнение:

$$7 = k \cdot 14 + l.$$

Решим систему уравнений $\begin{cases} 3 = k \cdot 12 + l, \\ 7 = k \cdot 14 + l \end{cases}$ и найдём значения коэффициентов k и l: $k = 2$, $l = -21$. Значит, прямая AB задаётся уравнением $y = 2x - 21$.

Теперь подставим в полученное уравнение прямой AB вместо x и y координаты точки C:

$$-31 = 2 \cdot (-5) - 21;$$
$$-31 = -31.$$

Равенство верное, следовательно, точка C принадлежит прямой $y = 2x - 21$.

Итак, мы доказали то, что требовалось: все три точки лежат на одной прямой.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

1) Некоторая прямая задана уравнением $y = kx + l$. Что можно сказать о коэффициентах этого уравнения, если известно, что эта прямая:

а) параллельна прямой $y = -5x + 4$;

б) пересекает ось y в той же точке, что и прямая $y = 4x - 5$?

2) Сформулируйте на алгебраическом языке утверждение о том, что прямая проходит через точку A (3; −8). Сформулируйте на геометрическом языке утверждение о том, что координаты точки B (5; 2) удовлетворяют уравнению некоторой прямой.

3) Разберите решение задачи 4 и изложите план решения этой задачи в случае, когда составляется уравнение прямой BC.

УПРАЖНЕНИЯ

СОСТАВЛЯЕМ УРАВНЕНИЯ ПРЯМЫХ

549 Запишите уравнение прямой и постройте эту прямую, если известно, что:
а) прямая проходит через начало координат и через точку (30; 20);
б) прямая пересекает ось y в точке (0; −10) и проходит через точку (15; 20).

550 Запишите уравнение прямой и постройте её, если известно, что:
а) угловой коэффициент прямой равен 3, и она проходит через точку (0; −4);
б) угловой коэффициент прямой равен −2, и она проходит через точку (0; 3).

551 Запишите уравнение прямой и постройте её, если известно, что:
а) угловой коэффициент прямой равен 2, и она проходит через точку (3; 2);
б) угловой коэффициент прямой равен $-\frac{1}{2}$, и она проходит через точку (4; 0).

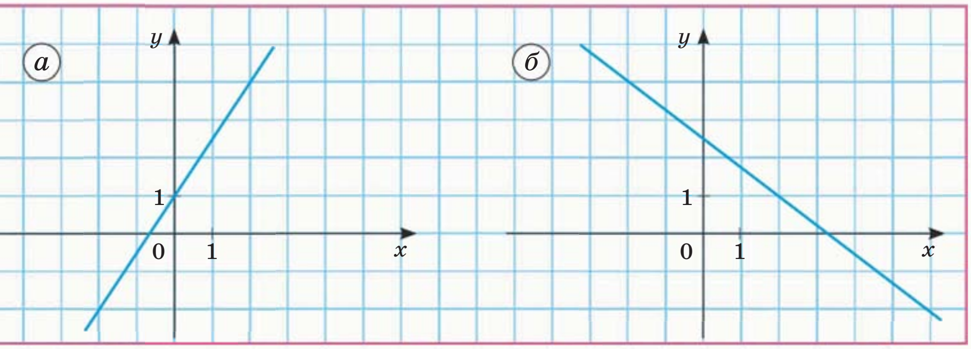
552 Запишите уравнение прямой, параллельной данной прямой и проходящей через заданную точку A:
а) $y = 3x$, A (−2; 1); б) $y = \frac{1}{2}x$, A (6; 5).

553 Запишите уравнение прямой, параллельной данной прямой и проходящей через данную точку:
а) $4x + 3y = 12$, A (6; −6); б) $5x - 2y = 2$, A (4; 11).

554 Запишите уравнение прямой, которая проходит через две данные точки:
а) A (1; 3), B (5; −4); б) A (−1; −1), B (4; 3).
В ответе уравнение запишите в виде $ax + by = c$.

555 Запишите уравнения прямых, изображённых на рисунке ***4.39***, *а*, *б*.

Рис. 4.39



Совет. Выберите на прямой две точки с «хорошими» координатами.

ИССЛЕДУЕМ ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ТОЧЕК И ПРЯМЫХ

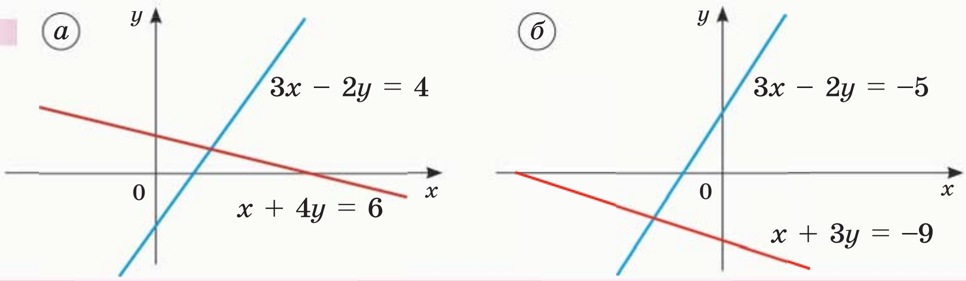
556 Найдите координаты точки пересечения прямых $3x + y = 3$ и $x - y = 5$. Определите, проходит ли через эту точку прямая: 1) $x - 2y = 8$; 2) $4x + y = 11$.

557 Определите, проходят ли через одну точку прямые:
а) $2x - 3y = 1$; $x + y = 3$ и $3x - y = 5$; б) $3x + y = 4$; $2x - y = 1$ и $3x - y = 2$.

558 При каком значении k прямая, заданная уравнением вида $y = kx$, и прямые $y = \frac{1}{2}x - 2$ и $y = -2x - 12$ пересекаются в одной точке?

559 Найдите расстояния от точки пересечения прямых до осей координат (*рис. 4.40*, *а*, *б*).

Рис. 4.40



560 Три прямые $y = \frac{2}{3}x + 2$, $y = -4x + 16$, $y = -\frac{6}{5}x + 2$, попарно пересекаясь, образуют треугольник. Найдите координаты его вершин.

561 Четыре точки заданы своими координатами: A (−5; 6), B (7; 2), C (5; 1), D (−4; 4). Определите, параллельны ли прямые: а) AB и CD; б) BC и AD.

562 Вершины четырёхугольника $ABCD$ заданы координатами: A (−2; 12), B (7; 18), C (21; 11), D (12; 5). Докажите, что этот четырёхугольник — параллелограмм.

563 Постройте прямую $y = \frac{1}{2}x + 2$. Постройте прямую, симметричную ей относительно: а) оси y; б) оси x; в) начала координат. В каждом случае запишите уравнение построенной прямой.

564

ЗАДАЧА-ИССЛЕДОВАНИЕ

1) В одной системе координат постройте прямые:
а) $y = 2x + 1$ и $y = -\frac{1}{2}x + 1$; б) $y = -3x + 6$ и $y = \frac{1}{3}x + 1$.
Убедитесь в том, что прямые на каждом из рисунков перпендикулярны.

2) Вы знаете, что угловые коэффициенты уравнений, задающих параллельные прямые, равны. Подметьте закономерность, которая связывает коэффициенты перпендикулярных прямых, построенных вами (пункт 1). Сформулируйте эту закономерность.

3) Пусть прямые $y = k_1x + l_1$ и $y = k_2x + l_2$ перпендикулярны. Запишите в буквенном виде соотношение, связывающее угловые коэффициенты перпендикулярных прямых.

4) Запишите уравнение какой-нибудь прямой, перпендикулярной прямой:
а) $y = x - 4$; б) $y = -\frac{2}{3}x + 1$. В каждом случае выполните чертёж.

5) Используя полученные вами выводы, решите следующую задачу.
Дана прямая $y = -\frac{2}{3}x + 3$. Запишите уравнение прямой:
а) перпендикулярной данной прямой и проходящей через начало координат;
б) перпендикулярной данной прямой и проходящей через точку A (4; 2);
в) пересекающей данную прямую под прямым углом в точке M (0; 3).

УЗНАЙТЕ БОЛЬШЕ

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ НЕРАВЕНСТВ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Пример 1. Рассмотрим уравнение $y = x$. Его графиком является прямая, образованная биссектрисами I и III координатных углов (***рис. 4.41**, а*). Эта прямая разбивает плоскость на две полуплоскости. Какая из них соответствует неравенству $y > x$?

Чтобы понять это, возьмём на прямой какую-нибудь точку, например M (2; 2). Понятно, что точки, у которых абсцисса равна 2, а ордината больше 2, лежат на вертикали $x = 2$ выше точки M (***рис. 4.41**, б*).

И вообще точки, у которых абсцисса равна некоторому числу a, а ордината больше a, расположены на вертикальной прямой $x = a$ выше точки её пересечения с биссектрисой $y = x$. Таким образом, неравенством $y > x$ задаётся полуплоскость, расположенная над прямой $y = x$ (***рис. 4.41**, в*). Так как неравенство $y > x$ строгое, то сама прямая $y = x$ рассматриваемому множеству не принадлежит. Чтобы показать это на графике, мы проводим её штриховой линией.

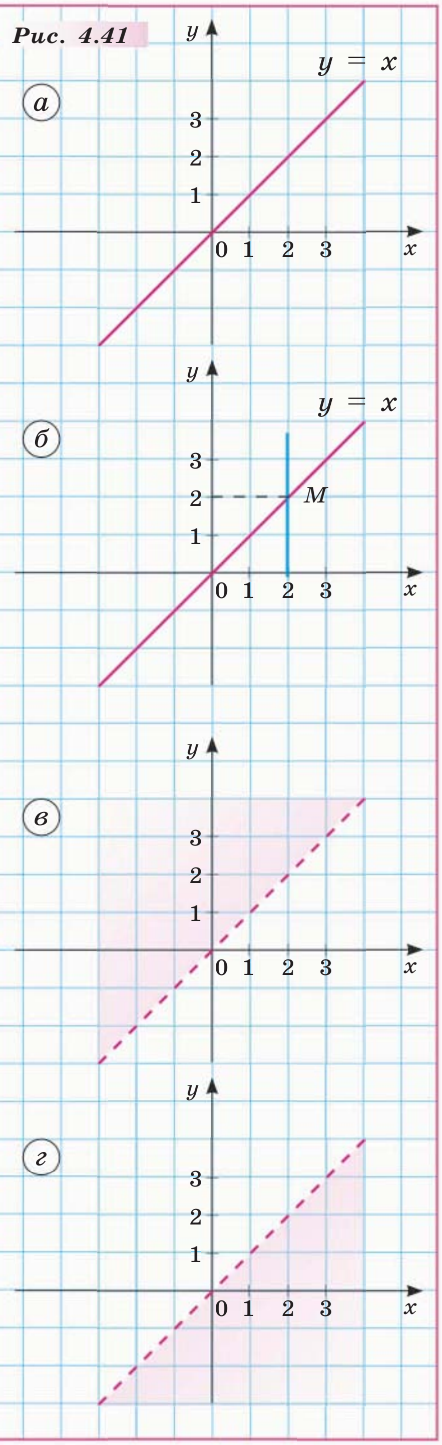
Очевидно, что полуплоскость под прямой $y = x$ задаётся неравенством $y < x$ (***рис. 4.41**, г*). Любая точка этой полуплоскости с абсциссой a имеет ординату меньше a.

Есть простой приём, который в данном случае позволил бы выяснить, какая из двух полуплоскостей задаётся неравенством $y > x$. Он состоит в следующем.

Возьмём любую точку плоскости, не лежащую на прямой $y = x$, например точку (2; 0). Эта точка расположена в полуплоскости под прямой. Проверим, удовлетворяют ли её координаты рассматриваемому неравенству. Подставив их в неравенство $y > x$, получим $0 > 2$, что неверно. Значит, эта точка не принадлежит множеству, задаваемому неравенством $y > x$, и этим неравенством задаётся другая полуплоскость.

Пример 2. Построим множество точек координатной плоскости, которое задаётся системой неравенств $\begin{cases} y < x - 1 \\ y < -x + 3. \end{cases}$

Рис. 4.41



Неравенством $y < x - 1$ задаётся множество точек, расположенных ниже прямой $y = x - 1$, а неравенством $y < -x + 3$ задаётся множество точек, расположенных ниже прямой $y = -x + 3$. Системе неравенств удовлетворяют координаты точек, принадлежащих сразу двум указанным множествам. Искомое множество точек показано двойной штриховкой на рисунке ***4.42***.

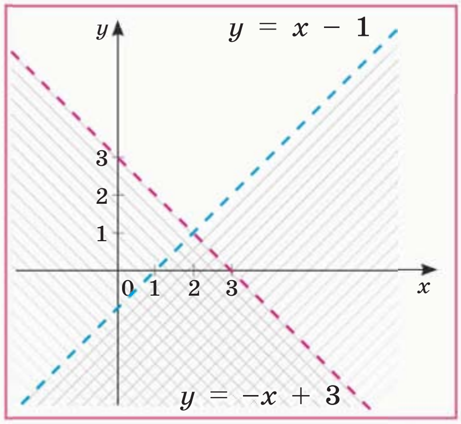


Рис. 4.42

Пример 3. Изобразим на координатной плоскости множество точек, задаваемое системой трёх неравенств $\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ y \leq -\frac{1}{2}x + 2. \end{cases}$

Получили треугольник вместе с его границами (***рис. 4.43***).

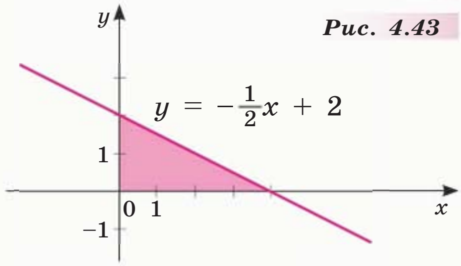


Рис. 4.43

1 Постройте множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству: а) $y \geq -x$; б) $y < -x$; в) $y \geq 2x$; г) $y \leq -2x + 4$.

2 Изобразите на координатной плоскости множество точек, которое задаётся неравенством: а) $y \geq x^2$; б) $y \leq x^3$.

3 Постройте множество точек плоскости, которое задаётся системой неравенств:

а) $\begin{cases} y \geq \frac{1}{3}x, \\ y \leq 6, \\ y \geq 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y \geq x - 1, \\ y \leq x + 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y \geq |x|, \\ y \leq 5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y \geq -x + 4, \\ y \geq x - 4, \\ y \leq \frac{1}{4}x + 2. \end{cases}$

4 Закрасьте часть координатной плоскости, которая расположена ниже каждой из прямых $x + 3y = 16$ и $2x + y = 12$, выше оси x, правее оси y. Задайте это множество точек плоскости системой неравенств.

5 Какое множество точек задаётся условием:

а) $x^2 + y^2 \leq 1$; б) $x^2 + y^2 \geq 9$; в) $\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1, \\ x^2 + y^2 \leq 9? \end{cases}$

6 Задайте системой неравенств множество точек координатной плоскости, изображённое на рисунках ***4.44***, *а–г*.

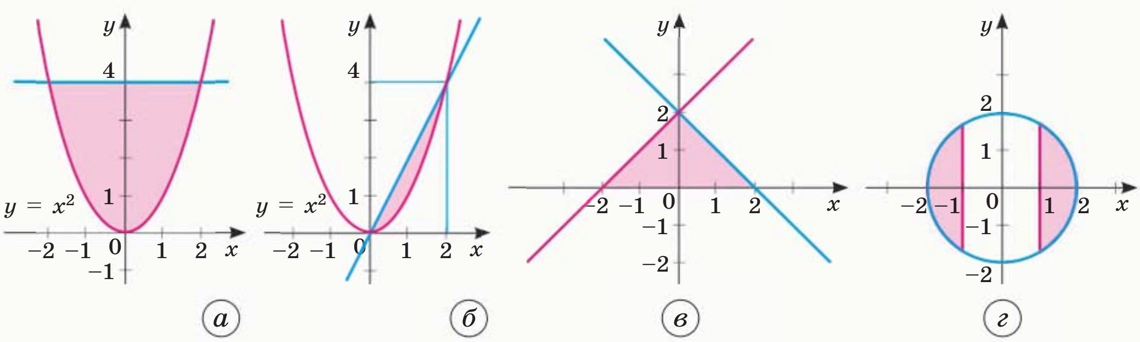


Рис. 4.44

ПОДВЕДЁМ ИТОГИ

Уравнения с двумя переменными

Любое равенство, содержащее две переменные, можно рассматривать как *уравнение с двумя переменными*.

Примеры уравнений с двумя переменными:
1) $x^2 + y^2 = 25$; 3) $xy = 6$;
2) $2x - 3y = 1$; 4) $y - x^2 = 6 - 5x$.

Решение уравнения с двумя переменными — это пара значений переменных, которая обращает уравнение в верное числовое равенство.

Пара (3,5; 2) — решение уравнения $2x - 3y = 1$.
Проверяем:
равенство $2 \cdot 3{,}5 - 3 \cdot 2 = 1$ верно.

Линейным уравнением с двумя переменными называется уравнение вида $ax + by = c$, где a, b и c — любые числа.

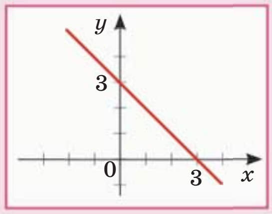
Примеры линейных уравнений:
1) $6x - 8y = 3$;
2) $2x + 0 \cdot y = 1$, в краткой форме: $2x = 1$;
3) $0 \cdot x - 4y = 5$, в краткой форме: $-4y = 5$.

Точка с координатами x и y принадлежит графику уравнения с переменными x и y в том и только том случае, когда пара чисел (x; y) является решением этого уравнения.
Графиком уравнения $ax + by = c$, в котором хотя бы один из коэффициентов a и b не равен нулю, является прямая.

Графики уравнений вида $ax + by = c$

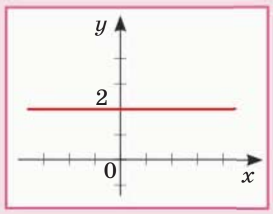
$x + y = 3$

$a = 1$,
$b = 1$,
$c = 3$.



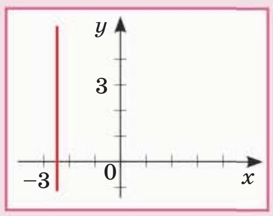
$0 \cdot x + 3y = 6$,
т. е. $y = 2$

$a = 0$,
$b = 3$,
$c = 6$.



$2x + 0 \cdot y = -5$,
т. е. $x = -2{,}5$

$a = 2$,
$b = 0$,
$c = -5$.



Любое уравнение вида $ax + by = c$, в котором $b \neq 0$, можно решить относительно y. Тогда оно примет вид $y = kx + l$, где k и l — некоторые числа. Число k называют **угловым коэффициентом прямой**, число l — **начальной ординатой**.

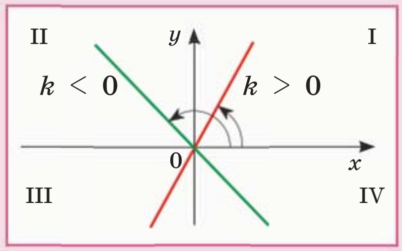
1) $8x - 4y = 10$, $y = 2x - 2{,}5$;
$k = 2$, $l = -2{,}5$.
2) $12x - 3y = 0$, $y = 4x$
$k = 4$, $l = 0$.
3) $0 \cdot x - 5y = 6$, $y = 0 \cdot x - 1{,}2$;
$k = 0$, $l = -1{,}2$.

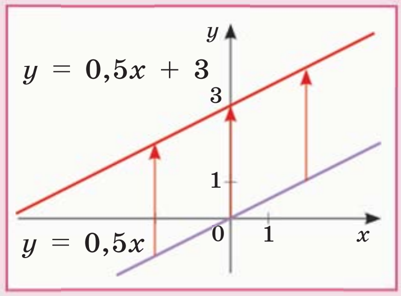
Графиком уравнения вида $y = kx$ является прямая, которая:
- проходит через начало координат;
- расположена в I и III координатных четвертях, если $k > 0$, и во II и IV координатных четвертях, если $k < 0$.

График уравнения $y = kx + l$, где $l \neq 0$, — это прямая, параллельная прямой $y = kx$ и пересекающая ось y в точке $(0;\ l)$.

Если у двух несовпадающих прямых угловые коэффициенты одинаковы, то эти прямые параллельны. Если две прямые имеют разные угловые коэффициенты, то эти прямые пересекаются.

$y = kx$





Прямые $y = 0{,}5x + 1$ и $y = 0{,}5x - 4$ параллельны, а прямые $y = 0{,}5x + 1$ и $y = 1{,}5x - 4$ пересекаются.

1 Какая из пар чисел — $(-3;\ -5)$ или $(-5;\ -3)$ — является решением уравнения $xy - x = 18$?

2 Выразите из уравнения $7x + 2y = 14$ переменную y через x и найдите какие-нибудь два его решения.

3 Можно ли разложить 132 карандаша в коробки по 12 штук и по 18 штук так, чтобы все использованные коробки были заполнены?

4 Проходит ли прямая $3x - 4y = 48$ через точку $A\ (20;\ 4)$? через точку $B\ (24;\ 6)$?

5 Постройте прямую, заданную уравнением $4x - 5y = 10$, найдя точки её пересечения с осями координат.

6 Постройте график уравнения:

а) $y = \frac{x}{3}$; в) $y = -4x + 2$; д) $9x - 3y = 6$;

б) $y = -2{,}5x$; г) $y = 0{,}5x - 1$; е) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = \frac{5}{6}$.

7 Покажите схематически, как в координатной плоскости располагаются прямые: $y = 0{,}2x$, $y = 1{,}4x$, $y = 7{,}3x$, $y = -7{,}3x$.

Системы уравнений

Решением системы уравнений с двумя переменными называют пару чисел, которая является решением каждого из уравнений, входящих в систему.

Решить систему уравнений — значит найти все её решения или убедиться в том, что их нет.

Решением системы уравнений
$$\begin{cases} 2x - y = 3, \\ 4x + 3y = 11 \end{cases}$$
является пара чисел $(2;\ 1)$.

Для решения системы уравнений с двумя переменными *способом сложения* надо:

- преобразовать уравнения так, чтобы коэффициенты при какой-либо переменной стали противоположными числами;
- сложить правые части и левые части уравнений и решить получившееся уравнение с одной переменной;
- найти соответствующие значения другой переменной.

Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - y = 3, \\ 4x + 3y = 11: \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 3, & \mid \cdot 3 \\ 4x + 3y = 11, \end{cases}$$

$$+\begin{array}{l} 6x - 3y = 9 \\ 4x + 3y = 11 \\ \hline 10x = 20, \\ \quad x = 2. \end{array}$$

Подставим $x = 2$ в первое уравнение: $2 \cdot 2 - y = 3$, $y = 1$.

Ответ: (2; 1).

Для решения системы двух уравнений с двумя переменными *способом подстановки* надо:

- выразить из какого-либо уравнения одну переменную через другую;
- подставить полученное выражение в другое уравнение, решить получившееся уравнение с одной переменной;
- найти соответствующие значения другой переменной.

Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - y = 3, \\ 4x + 3y = 11: \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 3, \\ 4x + 3y = 11, \end{cases}$$

$y = 2x - 3$,

$4x + 3(2x - 3) = 11$,

$x = 2$.

Найдём y:

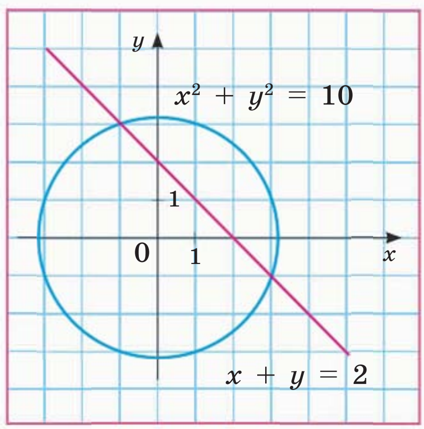
$y = 2 \cdot x - 3 = 2 \cdot 2 - 3 = 1$.

Ответ: (2; 1).

8 Является ли решением системы уравнений $\begin{cases} x + 2y = -5, \\ x - y = 7 \end{cases}$ пара чисел (3; −4)? (−1; −2)?

9 Решите систему уравнений: а) $\begin{cases} 5x + 2y = 8, \\ 3x - y = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + 4y = 13, \\ 5x + 2y = 17; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x - y = 1, \\ x^2 + 2y = 1. \end{cases}$

10 Составьте систему уравнений и решите задачу: «За 3 одинаковых карандаша и 5 одинаковых ручек заплатили 375 р., а за 6 таких же карандашей и 3 ручки — 330 р. Сколько стоит карандаш и сколько ручка в отдельности?»



11 Вычислите координаты точки пересечения прямых $3x - y = 2$ и $2x - y = 3$.

12 Вычислите координаты точки пересечения окружности $x^2 + y^2 = 25$ и прямой $x + y = 1$.

13 Используя рисунок, решите систему уравнений $\begin{cases} x + y = 2, \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases}$

ГЛАВА 5

ФУНКЦИИ

- ЧТЕНИЕ ГРАФИКОВ
- ЧТО ТАКОЕ ФУНКЦИЯ
- ГРАФИК ФУНКЦИИ
- СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ
- ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ
- ФУНКЦИЯ $y = \frac{k}{x}$ И ЕЁ ГРАФИК

Узнайте больше

- ЦЕЛАЯ И ДРОБНАЯ ЧАСТИ ЧИСЛА

ЛОМОНОСОВСКИЙ ТУРНИР

Это ежегодное многопредметное соревнование по математике, математическим играм, физике, астрономии, химии, биологии, истории, лингвистике, литературе. Его цель — дать участникам пищу для размышлений и подтолкнуть к серьёзным занятиям.

«Изюминкой» Турнира имени М.В. Ломоносова является форма проведения. Образно говоря, это слоёный пирог из нескольких олимпиад, которые проходят одновременно в течение 5–6 часов в разных аудиториях по разным предметам. Участники переходят из одной аудитории в другую, самостоятельно выбирая предметы, их очерёдность, время.

Задания ориентированы на учащихся 6–11 классов, а вообще в турнире может принять участие любой школьник. Кроме того, все желающие могут поучаствовать в заочной интернет-версии турнира.

Ломоносовский турнир проводится ежегодно с 1978 года, среди его организаторов — Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова и Российская академия наук.

5.1 ЧТЕНИЕ ГРАФИКОВ

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Какую информацию можно прочитать по графику.
- Как по графику найти среднюю скорость изменений.

Вам уже приходилось работать с графиками различных зависимостей между величинами. Наглядное представление зависимости на графике удобно для восприятия, что позволяет получить самую разнообразную информацию. Часто в одной и той же системе координат строят не один, а два или несколько графиков. И это позволяет сопоставлять представленные на них процессы. В этом пункте мы разберём несколько примеров.

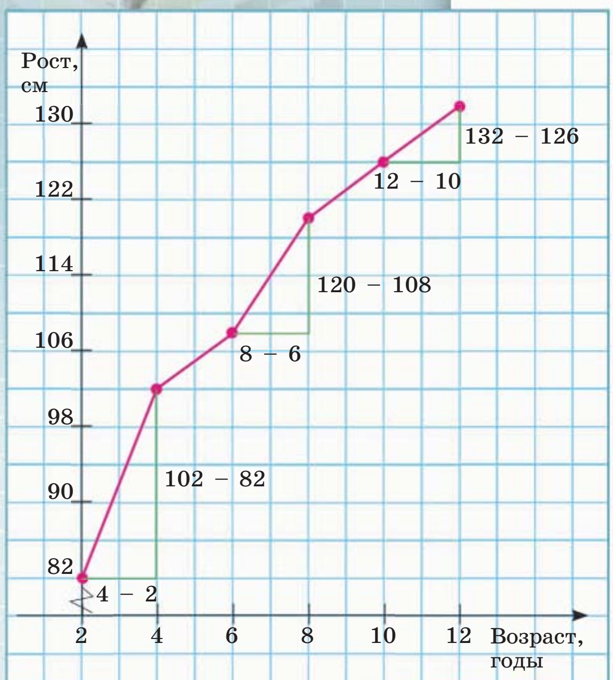
ГРАФИК ИЗМЕНЕНИЯ РОСТА

Пример 1. Родители измеряли рост сына в день его рождения каждые два года с 2 до 12 лет. Получились такие результаты:

Возраст, годы	2	4	6	8	10	12
Рост, см	82	102	108	120	126	132

Затем родители построили график роста сына. Для этого на горизонтальной оси отметили возраст, а на вертикальной — соответствующий рост. В результате получились точки, которые для наглядности соединили отрезками (*рис. 5.1*).

Рис. 5.1



С помощью построенного графика можно узнать, например, какого роста был сын в 9 лет, в каком возрасте его рост был 130 см. Конечно, результат, прочитанный по графику, может отличаться от реального результата. Каждый момент времени рост мальчика мог быть чуть меньше или чуть больше, чем в предшествующий момент, и изменения эти происходили каждый день. У нас же есть данные с интервалом в два года. Но и такой график даёт достаточно хорошее представление об изменении роста мальчика.

По графику легко увидеть, когда мальчик рос быстрее, а когда — медленнее. Например, с 2 до 4 лет он рос быстрее, чем с 4 до 6 лет. Можно вычислить среднюю скорость его роста в определённый период времени — для этого нужно найти отношение изменения роста за этот промежуток к его продолжительности. Так, с 6 до 8 лет мальчик вырос со 108 до 120 см. Значит, средняя скорость его роста (v) в этот период была равна $\frac{120-108}{8-6} = 6$ (см в год).

С 10 до 12 лет мальчик рос медленно:

$v = \frac{132-126}{12-10} = 3$ (см в год).

С 2 до 4 лет он рос очень быстро:

$v = \frac{102-82}{4-2} = 10$ (см в год).

ГРАФИК ИЗМЕНЕНИЯ ВЕСА

Пример 2. На рисунке ***5.2*** изображены графики, показывающие, как менялся вес двух детей — двойняшек Маши и Миши — в первый месяц их жизни. (Вы, конечно, понимаете, что в данном случае нужно говорить о массе детей, но в реальной жизни в этой ситуации обычно употребляют слово «вес».)

Рис. 5.2

У каждого из малышей вес сначала снижался, а потом и Маша, и Миша стали прибавлять в весе — так всегда бывает у новорождённых. Маша родилась с меньшим весом, однако уже на 14-й день она догнала Мишу, на 15-й день достигла своего первоначального веса и к концу месяца весила на 150 г больше, чем Миша. Наверное, Маша быстрее приспособилась к новой жизненной среде; она оказалась активнее Миши.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ График на рисунке ***5.3*** — это кардиограмма. По ней судят о работе сердца. Выделенный на графике фрагмент показывает сердечный ритм. Вы видите, что этот фрагмент повторяется.

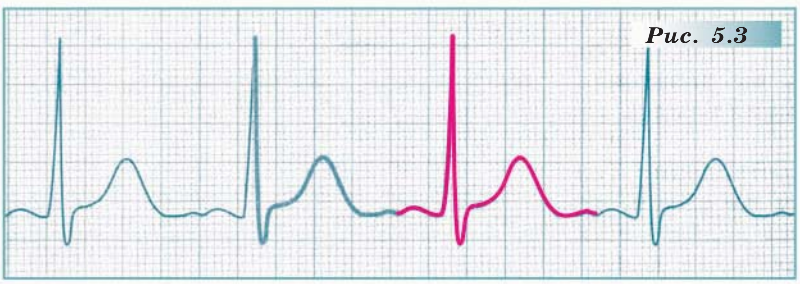


Рис. 5.3

Такого рода периодические процессы в реальной жизни встречаются часто. Это, например, изменение расстояния от Земли до Солнца — через каждый год Земля, вращаясь вокруг Солнца, возвращается в одну и ту же точку своей орбиты, и весь процесс повторяется.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Используя выделенные участки графика (***рис. 5.1***), объясните, как на графике различаются более высокая и более низкая скорости протекания процесса.
- Достиг ли Миша своего первоначального веса? Если да, то на какой день?
- Найдите среднюю скорость, с которой набирали вес Маша и Миша в период с 14-го по 21-й день жизни.
- Про вес Маши можно сказать, что начиная с 12-го дня он не понижался. Выделите какой-нибудь период, в течение которого вес Миши не понижался.

УПРАЖНЕНИЯ

ЧТЕНИЕ ГРАФИКОВ РЕАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

565 На рисунке *5.4* изображён график температуры воздуха в городе Весеннем 25 февраля 2014 г. По графику определите:
а) значение температуры в 6 ч; в 11 ч; в 18 ч;
б) максимальное значение температуры за сутки; минимальное значение температуры за сутки;
в) в какое время суток температура была $-3\,^\circ$C; $-2\,^\circ$C; $4\,^\circ$C;
г) в какое время суток температура была максимальной; минимальной;
д) в какое время суток температура была выше $0\,^\circ$C; ниже $0\,^\circ$C;
е) в какое время суток температура повышалась; понижалась; оставалась постоянной;
ж) в какие часы температура повышалась с наибольшей скоростью; понижалась с наибольшей скоростью;
з) какова была средняя скорость изменения температуры с 8 до 10 ч; с 0 до 4 ч.

Рис. 5.4

566 Турист в течение 30 минут дошёл от лагеря до озера, расположенного в 2 км от лагеря, и, пробыв там 40 минут, вернулся обратно. На всю прогулку он затратил полтора часа. На каком из графиков (***рис. 5.5***) изображена описанная ситуация? (На вертикальной оси отмечено расстояние туриста от лагеря.)

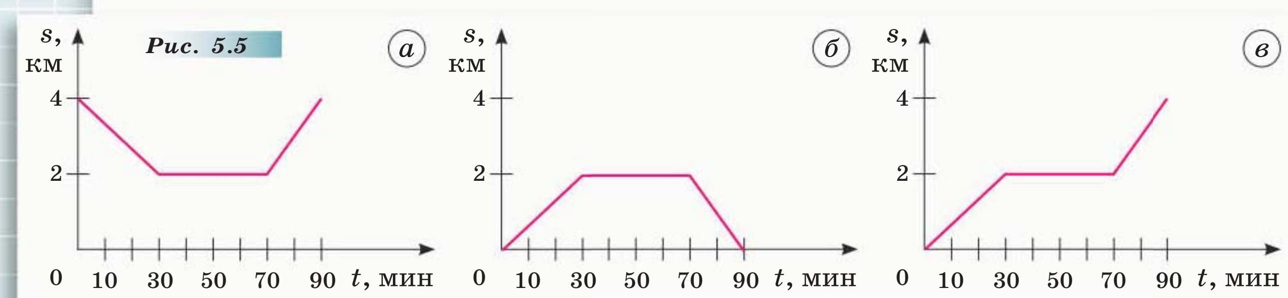


Рис. 5.5

567 В оптовом магазине сахар продаётся на следующих условиях: первые 30 кг по цене 40 р. за килограмм, а далее — по цене 20 р. за килограмм. На каком графике (***рис. 5.6***) показана зависимость стоимости одного килограмма сахара от массы покупки, а на каком — общая стоимость купленного сахара? Стрелка, поставленная на одном из лучей, показывает, что точка не принадлежит графику.

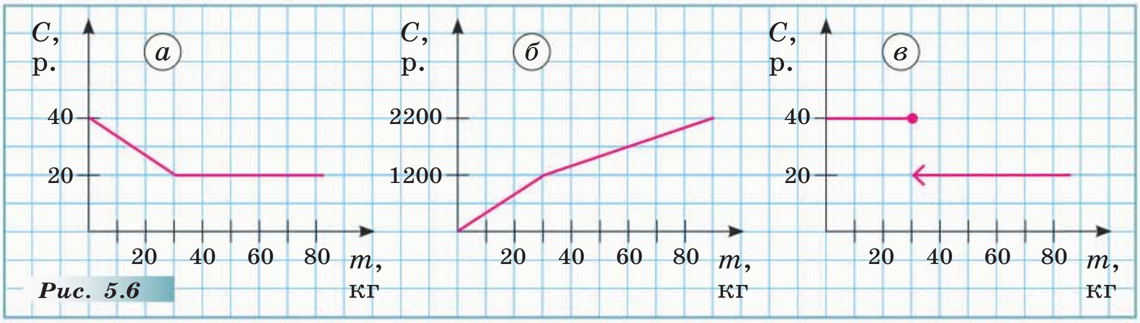


Рис. 5.6

568 Два человека крутят скакалку (***рис. 5.7, а***). Возьмём середину скакалки (точку A) и будем наблюдать, как меняется её высота над землёй в зависимости от времени. На рисунке ***5.7, б*** изображён график, показывающий эту зависимость.

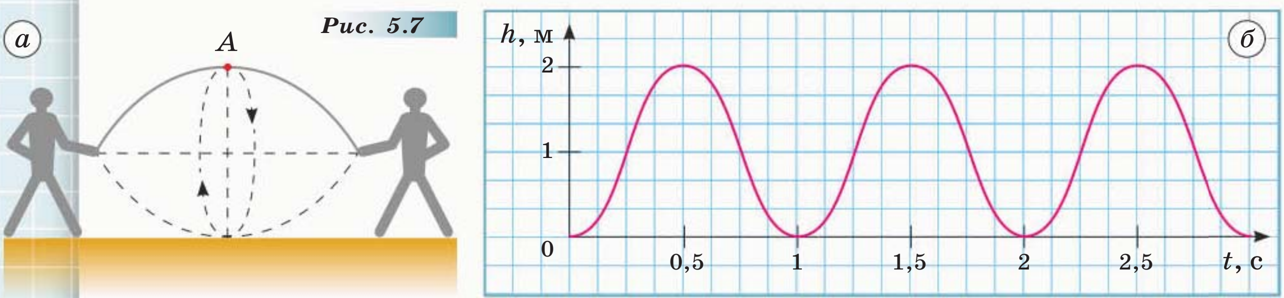


Рис. 5.7

Используя график, ответь на вопросы:

а) За какое время происходит один полный оборот скакалки?

б) На какой высоте находится точка A через 0,5 с после начала вращения? Через 1,25 с? через 2 с?

в) В какие моменты времени точка A находится на высоте 1 м? Назовите все такие моменты, если скакалку продолжат крутить 10 с.

г) В какие моменты времени точка A находится на высоте 2 м над землёй? Сколько раз она окажется на этой высоте, если скакалку крутят 2 минуты?

569 На рисунке ***5.8*** изображён график движения автомобиля из пункта A в пункт B и автобуса из пункта B в пункт A.

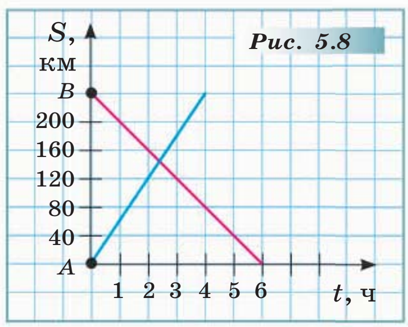


Рис. 5.8

а) Каково расстояние между пунктами A и B?

б) Через сколько времени после начала движения автомобиль и автобус встретились? Сколько километров к этому времени проехал автомобиль и сколько — автобус?

в) Кто раньше прибыл в конечный пункт: автомобиль или автобус? На сколько часов?

г) На сколько километров в час скорость автомобиля больше скорости автобуса?

570 Яхта отошла от причала на берегу озера и в течение часа курсировала по озеру. Через час она вернулась к причалу. Максимальное удаление от причала составило 3 км.

а) Начертите график, показывающий, как в течение этого часа могло меняться расстояние S (км) от яхты до причала, и прокомментируйте этот график.

б) Используя свой график, постройте график движения яхты, отложив по горизонтальной оси время движения, по вертикальной — пройденный путь.

5.2 ЧТО ТАКОЕ ФУНКЦИЯ

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Что называют функцией.
- Что такое аргумент функции и область определения функции.

Первым, кто установил понятие функциональной зависимости, её основную идею, был Галилео Галилей (1564–1642).

Рассматривая графики реальных зависимостей, вы не могли не заметить то общее, что было в каждом примере: мы всегда имели дело с двумя взаимосвязанными величинами — с изменением значений первой величины менялись и значения второй. Изучение зависимостей между величинами составляет смысл многих наук. Средством описания зависимостей служит понятие функции.

НЕЗАВИСИМАЯ И ЗАВИСИМАЯ ПЕРЕМЕННЫЕ Если с изменением значений первой величины изменяются и значения второй, то первую величину называют *независимой*, а вторую — *зависимой*. Так, с течением времени изменялись рост и вес ребёнка. В этих примерах время — независимая величина, остальные величины — зависимые. Конечно, независимой величиной может быть не только время.

Пример 1. В таблице показано, как при нагревании воды меняется количество поваренной соли, которое может раствориться в 100 г воды без осадка. Каждому значению температуры t соответствует определённое значение m — масса соли. Здесь независимая величина — температура t, а зависимая — масса m. Говорят, что t — *независимая переменная*, m — *зависимая переменная*.

t, °C	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
m, г	35,8	36,0	36,3	36,9	37,0	37,3	37,9	38,4	39,1	39,8

График зависимости изображён на рисунке *5.9*.

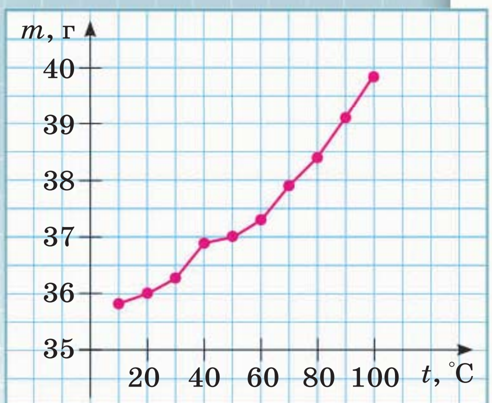


Рис. 5.9

ЧТО ТАКОЕ ФУНКЦИЯ Среди всего многообразия зависимостей переменных выделяют один наиболее важный. Если каждому значению независимой переменной с помощью графика, таблицы, формулы или как-то иначе поставлено в соответствие одно определённое значение зависимой переменной, то в таких случаях для зависимой переменной в математике используют термин *функция*.

> **!** Переменную y называют **функцией** переменной x, если каждому значению x из некоторого числового множества соответствует одно определённое значение переменной y.

Для независимой переменной тоже есть специальное название: её называют *аргументом*. Например, формула $y = x^2 - 2x$ задаёт переменную y как функцию переменной x: по этой формуле для любого значения аргумента x можно вычислить соответствующее значение функции y.

Выбор букв для обозначения переменных, вообще говоря, роли не играет. Однако в математике для обозначения аргумента и функции традиционно употребляются буквы x и y, а в задачах геометрических или физических используют стандартные для этих наук обозначения длины, площади, скорости, времени и т. д.

Функцией называют не только одну из двух переменных, но и саму зависимость между ними, и правило, по которому устанавливается соответствие между значениями аргумента и значениями функции.

Правило, по которому по данному значению аргумента находят соответствующее значение функции, принято обозначать какой-либо буквой. Чаще всего это буква f. Чтобы показать, что значения функции y получаются из значений аргумента x по правилу f, пишут: $y = f(x)$ (читается: «эф от икс»).

Пример 2. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \frac{5}{x+1}$. Найдём $f(1)$ — значение функции, соответствующее значению аргумента, равному 1.

В данном случае функция задана алгебраическим выражением, поэтому $f(1)$ — это результат подстановки в него вместо x числа 1. Имеем

$$f(1) = \frac{5}{1+1} = \frac{5}{2} = 2{,}5.$$

ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ В выражение из примера 2 вместо переменной x можно подставить любое число, кроме -1. Иными словами, аргумент x не может принимать значение, равное -1.

Все значения, которые может принимать аргумент, образуют **область определения функции**.

Если функция задана формулой и её область определения не указана, то считают, что она совпадает с областью допустимых значений аргумента. Например, областью определения функции $f(x) = x^2 - 2x$ является множество всех чисел. А областью определения функции $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x}$ является множество всех чисел, кроме 0 и 2.

В то же время при рассмотрении конкретных задач область определения функции сужают, учитывая «происхождение» аргумента. Например, в формулу $S = a^2$ вместо переменной a можно подставить любое число. Однако если речь идёт о площади квадрата S как функции его стороны a, то областью определения этой функции является множество положительных чисел.

Слово «функция» вы наверняка встречали в словосочетаниях типа «в функции дежурного входит...» или «в мои функции это не входит». Происходит оно от латинского *functio*, что означает «исполнение, служебная обязанность», так что его значение в русском языке в точности соответствует латинскому. А в математическом языке оно употребляется в переносном смысле: функция «исполняет» инструкции. Например, равенство $f(x) = 2x$ есть форма задания инструкции: значение аргумента x умножить на 2.
Первым использовал слово «функция» великий немецкий учёный Готфрид Лейбниц (1646–1716).

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Что означает запись $f(1)$?
- Для функции из примера 2 найдите $f(4)$, $f(0)$.
- Что называют областью определения функции?
- Укажите область определения функции: $f(x) = x^2 - 2x$, $f(x) = \frac{10}{x-1}$.
- Приведите примеры функций из физики и геометрии.

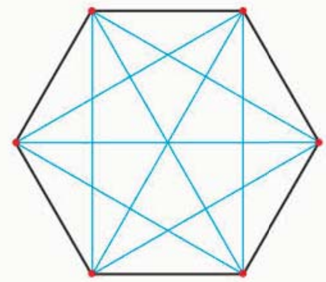
УПРАЖНЕНИЯ

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИИ

571 Автомобиль должен проехать 600 км. Двигаясь со скоростью v км/ч, он затратит на этот путь t ч. Задайте формулой время движения t как функцию скорости v. Найдите время движения, если скорость движения равна 40 км/ч, 60 км/ч, 80 км/ч. Найдите скорость движения, если время движения равно 5 ч, 6 ч, 8 ч.

572 МАТЕМАТИКА ВОКРУГ НАС Имелось 100 кг муки. Ежедневно расходовали 3 кг муки. Через x дней осталось y кг муки. Задайте формулой зависимость y от x. Найдите значение функции y при значении x, равном 3, 10, 30. Найдите значение аргумента, при котором значение функции равно 40, 55, 85. На сколько дней хватит 100 кг муки?

573 Число диагоналей p выпуклого многоугольника является функцией числа его вершин n. Задайте эту функцию формулой. Найдите p для $n = 5$; 10. Для каких значений аргумента n значение функции p равно 14? 54? Проинтерпретируйте полученные результаты на геометрическом языке.



574 Дана функция $y = 1 - x^3$, заполните таблицу:

x	-3			0		2	
y		9	2		0		-26

575 Функция задана формулой: а) $y = 3x + 5$; б) $y = \frac{2}{3 + x}$. Найдите значение функции для значения аргумента, равного -5; -1; 0; 3; 5.

576 Найдите значение аргумента, при котором:
а) функция $f(x) = -1{,}5x$ принимает значение, равное 9;
б) функция $f(x) = -\frac{1}{x}$ принимает значение, равное 10.

577 Существуют ли значения аргумента, при которых:
а) функция $y = x^2 + 7x + 15$ принимает значение, равное -5;
б) функция $y = x^4 + 3x^2 - 1$ принимает значение, равное 3;
в) функция $y = \frac{1}{3}x^3 + 1$ принимает значение, равное -10?

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ СИМВОЛИКА

578 Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = x^2 + 4$.
а) Обозначьте значение функции, соответствующее значению аргумента, равному 10, 0, -8, и вычислите эти значения функции.
б) Используя функциональную символику, запишите утверждение: если значение аргумента равно 5, то значение функции равно 29. Верно ли это утверждение?
в) Запишите на символическом языке утверждение: при $x = 2$ и $x = -2$ функция принимает равные значения. Верно ли это утверждение?

579 Для функции $y = -\frac{1}{x} + 5$ найдите: $f(-1)$; $f(2)$; $f\left(\frac{1}{4}\right)$.

580 Дана функция $f(x) = 0{,}5x^2 - 4$. Сравните:
а) $f(-5)$ и $f(4)$; б) $f(1)$ и $f(-1)$; в) $f(\sqrt{8})$ и $f(-\sqrt{10})$.

581 Для функции $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, \text{ если } x > 0, \\ 5, \text{ если } x \le 0, \end{cases}$ найдите её значение при значениях аргумента, равных -3; -2; 0; $0{,}1$; 5.

582 Дана функция $f(x) = x^2 + 1$. Найдите: $f(a)$; $f(-a)$; $f(a + 1)$.

583 Даны функции: $f(x) = \frac{x - 5}{x + 4}$ и $g(x) = 8 + \frac{1}{x}$. Покажите, что:
а) $f(-5) = g\left(\frac{1}{2}\right)$; б) $f(-2) < g(-0{,}1)$.

584 1) Пусть символом $a(x)$ обозначено количество сестёр человека по имени x, а символом $b(x)$ — количество его братьев.
а) Найдите $a(x)$ и $b(x)$, если x — это вы.
б) Что означает запись $a(x) + b(x) + 1$, если x — это вы?
в) Найдите $a(x)$, $b(x)$, $a(x) + b(x) + 1$, если x — это ваш сосед по парте.
2) Пусть $m(x)$ — мать человека x, а $o(x)$ — отец человека x. Как называют человека, который закодирован символом:
а) $o(m(x))$; б) $m(o(x))$; в) $m(m(x))$; г) $o(o(x))$?

585 Пусть $f(x) = x - 3$, $g(x) = \sqrt{x}$. Найдите: а) $f(g(100))$; б) $g(f(19))$.

Неверно! Дана функция $f(x) = 1 - 3x^2$. Какое из следующих утверждений неверно?
1) $f(0) = 1$; 2) $f(-1) = -2$; 3) $f(1) = 2$; 4) $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$.

ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ

586 Укажите области определения функций в заданиях № 571–573.

587 Найдите область определения функции, заданной формулой:
а) $y = 5x^2 - 3x$; б) $y = \frac{x - 5}{10}$; в) $y = \frac{5}{4 + x^2}$; г) $y = \frac{x}{x^2 - 9}$.

588 Найдите область определения каждой из функций:
а) $y = \sqrt{x}$ и $y = \frac{5}{\sqrt{x}}$; б) $y = \frac{1}{|x - 2|}$ и $y = \frac{1}{|x| - 2}$.

589 МАТЕМАТИКА ВОКРУГ НАС Для перевода температуры, измеренной в градусах Цельсия, в градусы Фаренгейта пользуются формулой $F = \frac{9}{5}C + 32$, где C — число градусов по шкале Цельсия, а F — число градусов по шкале Фаренгейта. Найдите область определения функции $F(C)$.

5.3 ГРАФИК ФУНКЦИИ

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Как строить и читать график функции.

График функции даёт представление о геометрическом образе функции. По графику легко отличить одну функцию от другой. Поэтому если функция задана таблицей или формулой, то математики, как правило, строят её график и смотрят, как она «выглядит». Можно сказать, что график — это «портрет» функции.

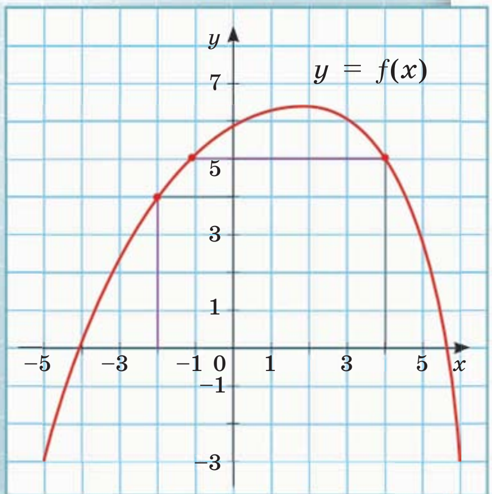


Рис. 5.10

ЧИСЛОВЫЕ ПРОМЕЖУТКИ Когда вы будете работать с графиками функций, вам постоянно придётся иметь дело с числовыми промежутками. Например, на рисунке ***5.10*** изображён график функции $y = f(x)$, областью определения которой является отрезок от -5 до 6.

До сих пор числовые промежутки вы записывали с помощью неравенств. Однако существуют и другие способы обозначения промежутков, которые часто бывают более удобными.

Название	Изображение	Неравенство	Обозначение
Отрезок	a b	$a \le x \le b$	$[a;\ b]$
Интервал	a b	$a < x < b$	$(a;\ b)$
Полуинтервал	a b a b	$a \le x < b$ $a < x \le b$	$[a;\ b)$ $(a;\ b]$
Замкнутый луч	a b	$x \ge a$ $x \le b$	$[a;\ +\infty)$ $(-\infty;\ b]$
Открытый луч	a b	$x > a$ $x < b$	$(a;\ +\infty)$ $(-\infty;\ b)$

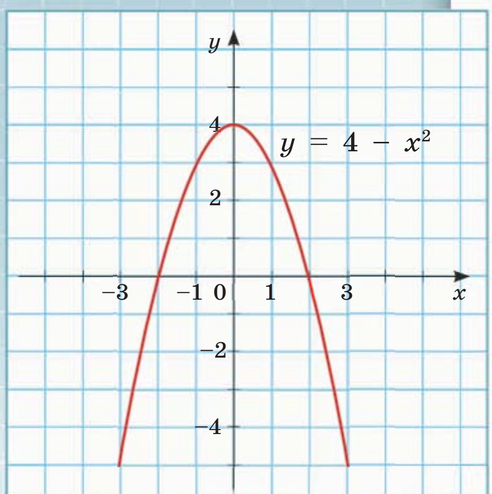


Рис. 5.11

Обратите внимание на разницу в обозначениях отрезка и интервала, замкнутого луча и открытого луча: если граничная точка принадлежит промежутку, то это показывается с помощью квадратной скобки, если нет — ставится круглая скобка. Символы $+\infty$ и $-\infty$ читаются так: «плюс бесконечность» и «минус бесконечность».

Нельзя не заметить, что для интервала от a до b принято такое же обозначение, как и для точки с координатами a и b. Здесь вы имеете дело с ситуацией, которая часто встречается и в обычном языке: слова-омонимы (например, «коса», «ключ») чрезвычайно распространены. Однако из контекста всегда можно понять, о чём идёт речь.

ЧИТАЕМ ГРАФИК ФУНКЦИИ Вернёмся к графику, изображённому на рисунке ***5.10***. Каждой точке графика соответствует пара чисел: абсцисса точки — это значение аргумента, а её ордината — соответствующее значение функции. С помощью графика по значению аргумента можно найти соответствующее значение функции $y = f(x)$ и, наоборот, по известному значению функции можно найти значения аргумента, которым оно соответствует.

Найдём, например, значение функции при $x = -2$. Для этого через точку оси x с абсциссой, равной -2, проведём к этой оси перпендикуляр. Точка пересечения перпендикуляра с графиком функции имеет координаты $(-2;\ 4)$. Значит, $f(-2) = 4$.

Найдём теперь по графику значения аргумента, при которых значение функции равно 5. Для этого проведём через точку оси y с ординатой, равной 5, прямую, перпендикулярную этой оси. Эта прямая пересекает график функции в двух точках: $(-1;\ 5)$ и $(4;\ 5)$. Это означает, что значение, равное 5, функция принимает дважды: при $x = -1$ и $x = 4$.

СТРОИМ ГРАФИК ФУНКЦИИ Пусть функция задана формулой $y = 4 - x^2$. Эту формулу можно рассматривать как уравнение с двумя переменными. График этого уравнения и является графиком функции $y = 4 - x^2$.

Чтобы построить этот график, составим таблицу, в которой укажем некоторые пары значений аргумента x и функции y.

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	−0,5	−1	−1,5	−2	−2,5	−3
y	4	3,75	3	1,75	0	−2,25	−5	3,75	3	1,75	0	−2,25	−5

Отметим точки, указанные в таблице, на координатной плоскости и соединим их плавной линией (***рис. 5.11***). Мы получили линию, название которой вам уже известно, — это парабола.

Функция $y = 4 - x^2$ принимает одинаковые значения при противоположных значениях аргумента, поэтому можно было сократить таблицу и использовать при построении графика симметрию относительно оси y.

ПРИМЕР ЗАВИСИМОСТИ, НЕ ЯВЛЯЮЩЕЙСЯ ФУНКЦИЕЙ Не всякое уравнение с двумя переменными задаёт функцию. Например, уравнение $y^2 = x$. Его графиком является парабола (***рис. 5.12***). Проведём к оси x перпендикулярную прямую, например, через точку с абсциссой 4. Она пересечёт параболу в двух точках: $(4;\ 2)$ и $(4;\ -2)$, т. е. одному значению x, равному 4, соответствует сразу два значения y. Значит, это не функция.

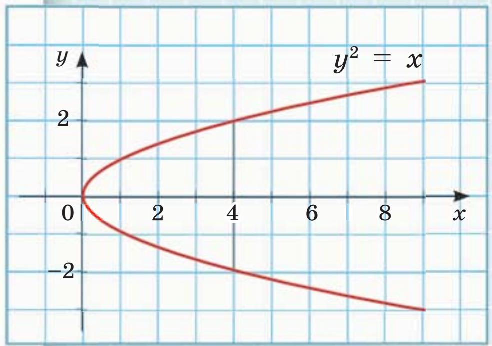
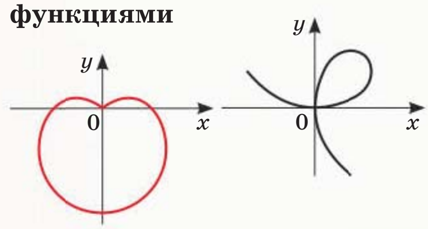


Рис. 5.12

Примеры графиков зависимостей, не являющихся функциями



ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Проиллюстрируйте примером каждый из числовых промежутков (см. табл.).
- Изобразите промежуток и запишите его обозначение:
  а) $-3 \le x \le 2$; г) $x \ge 4$;
  б) $-8 < x < 0$; д) $x \le 5$;
  в) $-5 \le x < 5$; е) $x < 0$.
- По графику **5.10** расскажите, как найти $f(-2)$. Найдите $f(3)$; $f(-4)$.
- По графику **5.10** расскажите, как найти x, при которых $f(x) = 5$. Найдите x, при которых $f(x) = -3$.
- Расскажите, как построить график функции, заданной формулой.
- Объясните, не обращаясь к графику, почему уравнение $y^2 = x$ не задаёт функцию.

УПРАЖНЕНИЯ

СТРОИМ ГРАФИК ФУНКЦИИ

590 МАТЕМАТИКА ВОКРУГ НАС Маша посадила подсолнух и в течение 12 недель вела наблюдение за его развитием, измеряя длину стебля в конце каждой недели:

t, нед.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
h, см	20	37	73	100	140	175	200	225	240	250	255	260

Постройте график функции $h = f(t)$, где t — время (нед.), h — длина стебля (см). Используя график, ответьте на вопросы:

а) Какой примерно была длина стебля через 3,5 недели?
б) Примерно на какой день длина стебля достигла 50 см; 210 см?
в) В какую неделю подсолнух рос быстрее всего, а в какую — медленнее всего?
г) Когда рост растения был интенсивнее — в первые четыре недели или в следующие четыре недели?
д) Когда подсолнух перерос Машу, если её рост 152 см?

591 Функция задана графиком (*рис. 5.13*). Составьте таблицу значений функции на промежутке [−1; 2] с шагом 0,5. Воспроизведите график в тетради.

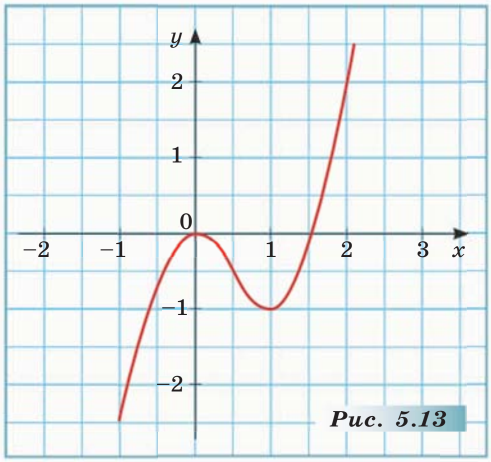


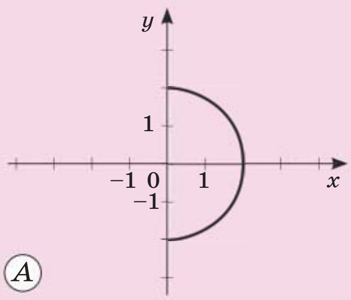
Рис. 5.13

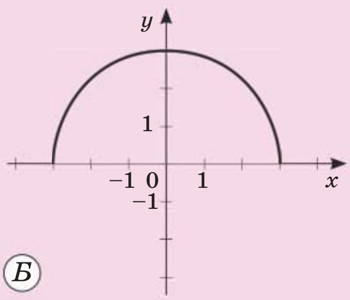
592 Составьте таблицу значений функции и постройте её график:
а) $y = x^2 - 1$, где $-3 \le x \le 3$;
б) $y = 5 - x^2$, где $-4 \le x \le 4$;
в) $y = x^2 - 2x$, где $-2 \le x \le 4$;
г) $y = -x^2 - 2x$, где $-4 \le x \le 2$.

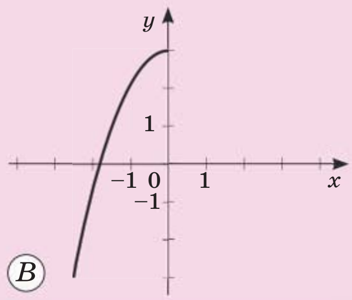
593 Постройте график функции:
а) $y = x^3 - 3x$; б) $y = 3x^2 - x^3$.

594 Постройте график функции, заданной формулой $y = x^2 + 1$. Начертите кривую, симметричную этому графику относительно оси x. Эта кривая — график некоторой функции, задайте её формулой.

Неверно! Андрей считает, что на каждом из рисунков изображён график функции. Так ли это? Обоснуйте свое мнение.







ПЕРЕСЕКАЕТ ЛИ ГРАФИК ОСИ КООРДИНАТ?

595 Какие из точек $(-1; 10)$, $(0; 4)$, $(2; -1)$, $(3; -10)$ принадлежат графику функции $y = -3x + 7$? Запишите координаты ещё двух каких-либо точек, одна из которых принадлежит этому графику, а другая нет.

596 Пересекает ли график функции ось x? Если да, то в каких точках?
а) $y = x^2 + x + 1$; б) $y = x^2 - x^3$; в) $y = x^4 + 1$.

597 В каких точках график функции пересекает координатные оси:
а) $y = 20x + 75$; б) $y = -8x + 1$; в) $y = x^2 - 16$; г) $y = 2 - x^2$?

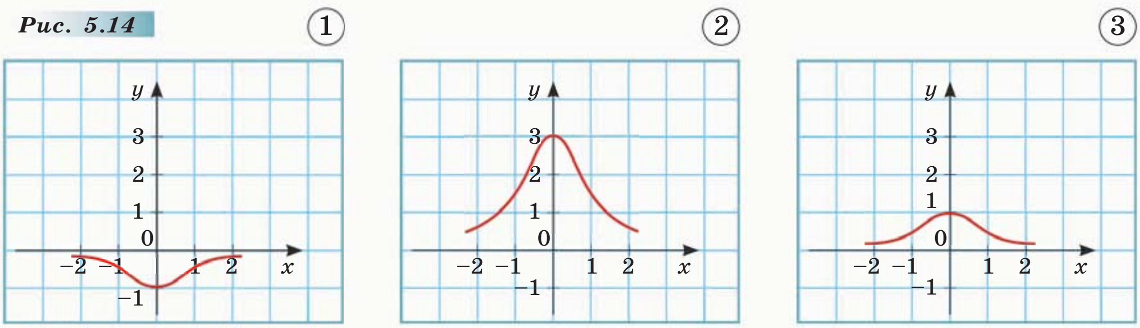
598 Дана функция $y = f(x)$. Известно, что $f(5) = 0$ и $f(0) = -4$. Сформулируйте эти факты на геометрическом языке.

599 Функции заданы формулами: $y = x^2 + 5$, $y = x^2 + 5x$, $y = \frac{x}{x+1}$, $y = \frac{x+1}{x}$.
В каждом случае определите, проходит ли график функции через начало координат. Задайте формулой ещё какую-нибудь функцию, график которой проходит через начало координат.

600 Докажите, что график функции:
а) $y = 3x^2 + 4$ целиком расположен в верхней полуплоскости;
б) $y = \frac{x^2+5}{x-5}$ не пересекает ось x;
в) $y = 3 - \frac{1}{x}$ не пересекает ось y.

601 На рисунке ***5.14*** изображены графики функций $y = \frac{1}{x^2+1}$, $y = -\frac{1}{x^2+1}$, $y = \frac{3}{x^2+1}$. Для каждого графика укажите соответствующую формулу. Какой особенностью графика вы воспользовались?

Рис. 5.14



602 На ***рисунке 5.15*** изображён график функции
$$y = x^3 + 3x^2 - x - 3.$$
Найдите координаты точек A, B и C.

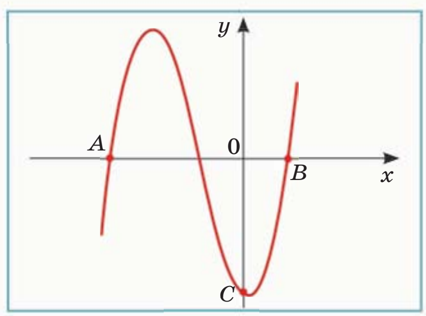


Рис. 5.15

5.4 СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- О каких свойствах функции может рассказать её график.

Работа с формулой, задающей функцию, и изучение свойств функции, предпринятые для того, чтобы получить возможность изобразить её график, — это настоящее исследование, одно из первых математических исследований, с которыми сталкивается каждый школьник. Какими же свойствами могут обладать функции?

О ЧЁМ «РАССКАЗЫВАЕТ» ГРАФИК Вспомните, как мы считывали информацию с графиков реальных зависимостей. Например, если мы имели дело с графиком температуры (***рис. 5.16***), то искали на нём верхнюю и нижнюю точки — в результате узнавали наибольшее и наименьшее значения температуры.

Рис. 5.16

Кроме того, мы узнавали, где график располагается выше горизонтальной оси, а где — ниже, тем самым получая информацию о том, когда температура была положительной, а когда — отрицательной. Наконец, нас интересовали промежутки, на которых график поднимается вверх или опускается вниз, им соответствуют периоды повышения и понижения температуры. Точно так же график всякой функции, являясь её геометрическим изображением, наглядно отражает все её свойства.

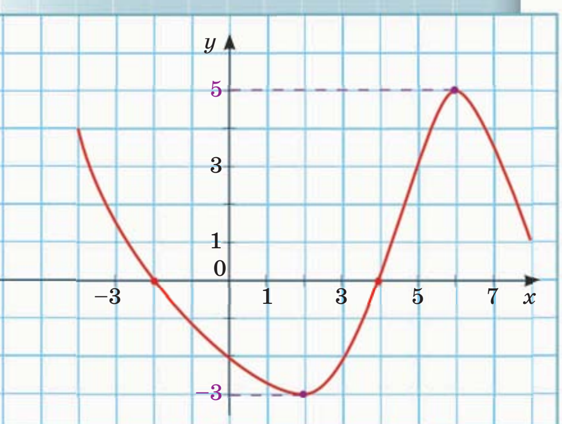


Рис. 5.17

НУЛИ ФУНКЦИИ На рисунке ***5.17*** изображён график функции $y = f(x)$, областью определения которой является промежуток $[-4; 8]$. Посмотрим, о каких свойствах этой функции говорит её график.

У графика есть нижняя точка и верхняя точка. Значит, у функции $y = f(x)$ есть *наибольшее и наименьшее значения*. Наименьшее значение этой функции равно -3, а наибольшее значение равно 5.

В точках с абсциссами −2 и 4 график пересекает ось x. А это означает, что $f(x) = 0$ при $x = -2$ и при $x = 4$.

! Значения аргумента, при которых функция обращается в нуль, называют *нулями функции*.

В данном случае нули функции — это числа −2 и 4.

При $-4 < x < -2$ и при $4 < x < 8$ график расположен выше оси абсцисс, а при $-2 < x < 4$ он расположен ниже оси абсцисс (***рис. 5.18***). Значит, на промежутках (−4; −2) и (4; 8) *значения функции положительны*, а на промежутке (−2; 4) *значения функции отрицательны*.

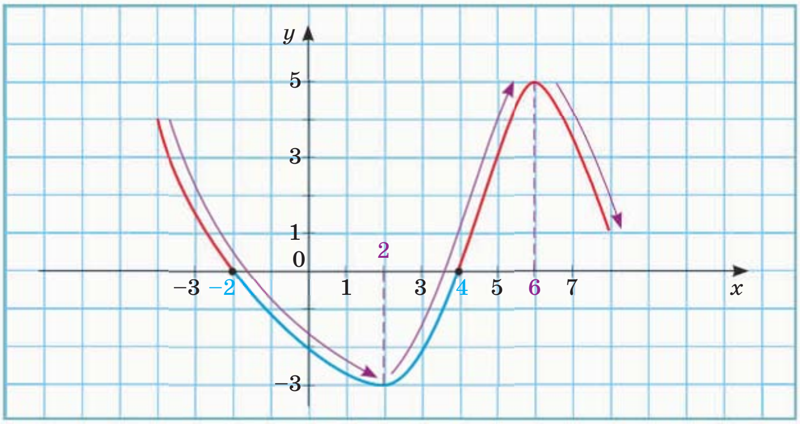


Рис. 5.18

ВОЗРАСТАНИЕ И УБЫВАНИЕ ФУНКЦИИ Если двигаться по оси x слева направо, то можно увидеть, что с увеличением x от −4 до 2 график функции идёт вниз, т. е. значения функции уменьшаются (***рис. 5.18***). Говорят, что на промежутке (−4; 2) *функция убывает*. С увеличением x от 2 до 6 график идёт вверх, т. е. значения функции увеличиваются. Говорят, что на промежутке (2; 6) *функция возрастает*. На промежутке (6; 8) функция снова убывает.

На рисунке ***5.19*** изображён график некоторой функции. Как видим, эта кривая при движении слева направо всё время поднимается вверх. Функция возрастает на всей области определения. Такие функции называют *возрастающими*. Функции, которые убывают на всей области определения, называют *убывающими*.

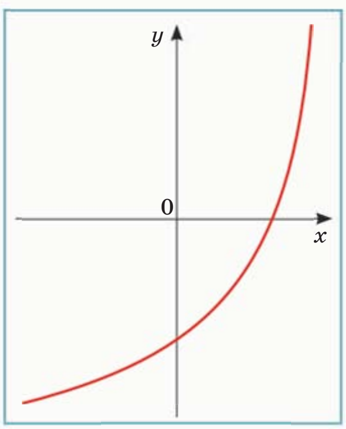


Рис. 5.19

Удивительно, но графики многочленов могут иметь самую причудливую форму. Более того, любая непрерывная кривая, имеющая на некотором промежутке $a \le x \le b$ с каждой из прямых, параллельных оси ординат, в точности одну общую точку, может быть приближённо задана как график функции $y = P(x)$, где $P(x)$ — многочлен.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- По графику температуры (***рис. 5.16***) укажите:
  а) наибольшее и наименьшее значения температуры;
  б) промежутки времени, когда температура была положительной; отрицательной;
  в) промежутки времени, когда температура повышалась; понижалась.
- Опираясь на рисунок ***5.18***, объясните, как определить по графику:
  а) наибольшее и наименьшее значения функции;
  б) нули функции;
  в) промежутки, на которых значения функции положительны; отрицательны;
  г) промежутки, на которых функция возрастает; убывает.

УПРАЖНЕНИЯ

СВОЙСТВА ФУНКЦИИ

603 На рисунке ***5.20*** изображён график функции $y = f(x)$, областью определения которого является отрезок $[-2; 2]$. Используя график, ответьте на вопросы:
1) Есть ли у функции наибольшее или наименьшее значение; если есть, то чему оно равно? При каком значении аргумента функция принимает это значение?
2) Укажите нули функции.
3) Укажите промежутки, на которых функциях принимает положительные значения; отрицательные значения.
4) Укажите промежутки, где функция возрастает; убывает.

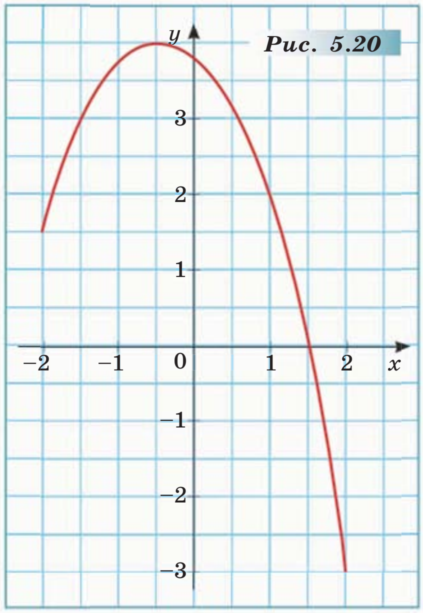


Рис. 5.20

604 Нулями функции $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 28x + 15$ являются числа -3; 5; 0,5. Убедитесь в справедливости этого утверждения. Сформулируйте этот факт другими способами, используя слова «график», «значение функции», «уравнение».

605 На рисунке ***5.21*** изображён график функции, определённой на множестве всех чисел. Какие свойства функции можно выяснить с помощью её графика?

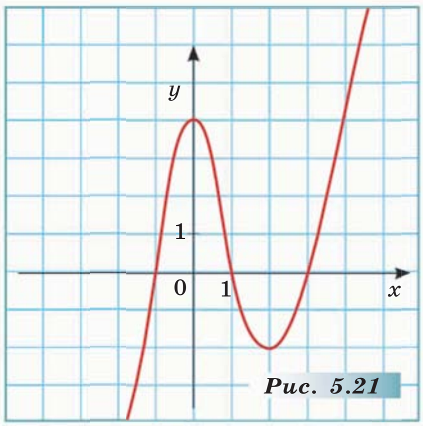


Рис. 5.21

Найдите нули функции (№ 606–608):

606 а) $y = x^2 - 2x - 8$; б) $y = 3x^2 + x - 2$; в) $y = x^2 - 9x$; г) $y = 10 - x^2$.

607 а) $f(x) = (x - 1)\left(x + \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)$; б) $f(x) = 10x^4 - 5x^2$; в) $f(x) = x^2(2x - 3)$.

608 а) $y = x^3 - x^2 - x + 1$; б) $y = x^3 - x^2 + x - 1$; в) $y = 2x^3 - 6x^2 - 8x$; г) $y = 5x - x^3$; д) $y = 2x^5 + 54x^2$; е) $y = 8x^4 - 125x$.

609 График какой из функций изображён на рисунке ***5.22***:
$f(x) = 2(x + 2)(x - 1)(x - 3)$;
$g(x) = 2(x + 2)(x - 1)(x - 4)$;
$h(x) = 2(x + 2)(1 - x)(x - 4)$;
$p(x) = (x + 2)(x - 1)(x - 3)$?

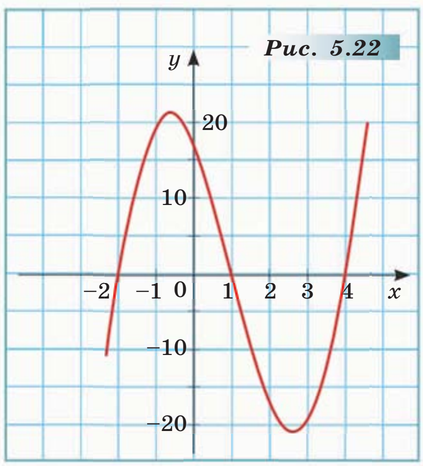


Рис. 5.22

610 Задайте формулой какую-нибудь функцию, нулями которой являются числа:
а) -3; 1; 7; б) -4; $\frac{5}{2}$; $\frac{1}{3}$.

611 Среди графиков, изображённых на рисунке ***5.23***, найдите график функции, которая возрастает при $x \le 2$ и убывает при $x \ge 2$.

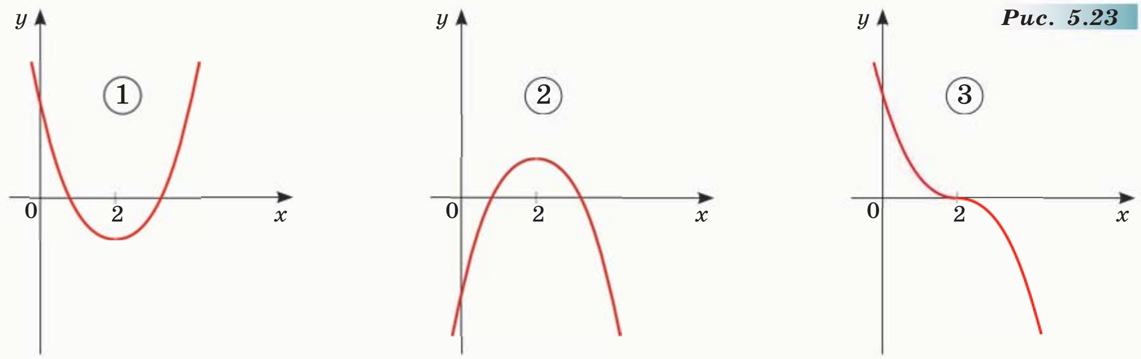


Рис. 5.23

612 На рисунке ***5.24*** построены графики квадратных трёхчленов: $f(x) = x^2 - 4x + 4$; $g(x) = x^2 - 2x + 4$; $h(x) = \cup x^2 - 6x + 4$. Соотнесите каждый график с формулой.

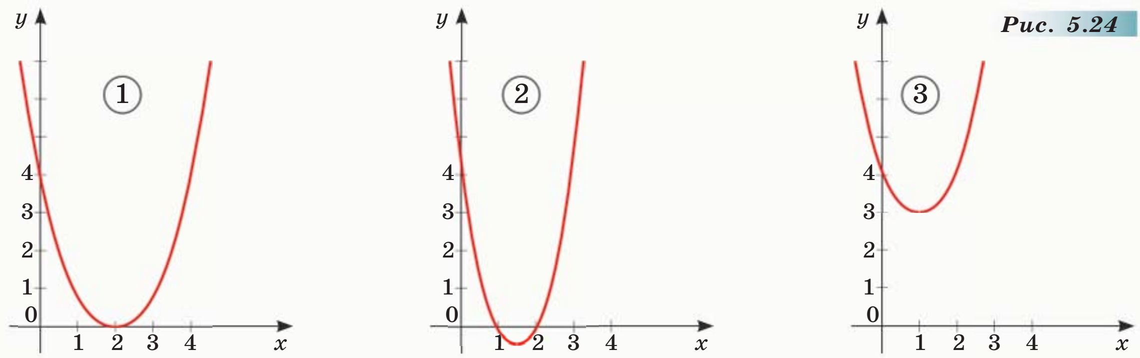


Рис. 5.24

СТРОИМ И МОДЕЛИРУЕМ ГРАФИКИ ФУНКЦИЙ

613 Начертите график какой-нибудь функции, нулями которой являются числа: а) $-3{,}5$; 0; 4; б) -5; -1; 2,5; 4,5. Укажите промежутки, на которых значения функции положительны; отрицательны.

614 Постройте график функции и прочитайте по графику её свойства:
а) $y = x^2$; б) $y = -x^3$; в) $y = |x|$; г) $y = \sqrt{x}$.

615 Начертите график какой-нибудь функции, обладающей следующими свойствами:
а) при $x \ge -1$ функция возрастает, а при $x \le -1$ функция убывает; нулями функции являются числа -2 и 1;
б) функция возрастает при $x \le 2$ и при $5 \le x \le 7$; убывает при $2 \le x \le 5$ и при $x \ge 7$; при $x = 2$ она принимает наибольшее значение;
в) значения функции положительны при $x < -3$ и при $x > 5$; отрицательны при $-3 < x < 5$; при $x = 0$ она принимает наименьшее значение.

616 Постройте график функции и перечислите её свойства:

а) $y = \begin{cases} 1, \text{ если } |x| > 1, \\ x^2, \text{ если } |x| \le 1; \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} -8, \text{ если } x < -2, \\ x^3, \text{ если } -2 \le x \le 2, \\ 8, \text{ если } x > 2. \end{cases}$

5.5 ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Какую функцию называют линейной.
- Какая линия является графиком линейной функции.

Часто величины самой разной природы связаны между собой одной и той же зависимостью и их описывает одна и та же модель. Начнём знакомство с самой простой модели описания реальных процессов — с линейной функции.

ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ Рассмотрим три примера реальных зависимостей.

- Пусть оплата повременной телефонной связи такова: абонентская плата за месяц — 158 р., стоимость 1 минуты разговора — 0,32 р. Зависимость стоимости услуг за месяц c (в р.) от количества минут разговора n выражается формулой $c = 158 + 0{,}32n$.
- Если тело движется с постоянным ускорением 0,2 см/с^2, а его начальная скорость равна 4 см/с, то зависимость скорости движения v (в см/с) от времени t (в с) выражается формулой $v = 4 + 0{,}2t$.
- Если в баке автомобиля 50 л бензина, а на каждый километр пути в среднем расходуется 0,07 л, то количество литров бензина r, которое остаётся в баке после s км пути, выражается формулой $r = 50 - 0{,}07s$.

Три полученные формулы различаются только буквами и числовыми коэффициентами, но одинаковы по структуре. Эти, а также и многие другие зависимости, имеющие место в природе и обществе, описываются *линейной функцией*, которая является их математической моделью.

> **!** Функция, которую можно задать формулой вида $y = kx + l$, где k и l — некоторые числа, называется линейной.

ГРАФИК ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ Так как геометрический образ линейного уравнения $y = kx + l$ на координатной плоскости — это прямая, то **графиком линейной функции является прямая.**

> **!** Если $k > 0$, то линейная функция является возрастающей, если $k < 0$, то линейная функция является убывающей (*рис. 5.25*).

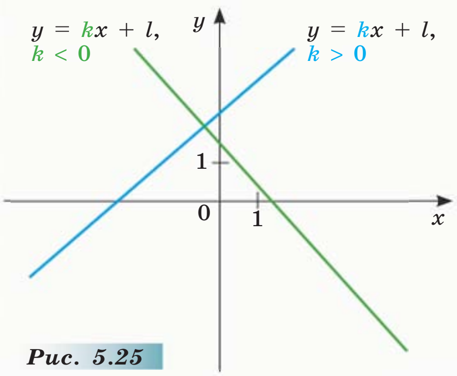


Рис. 5.25

Если $l = 0$, то мы получаем формулу $y = kx$. *График функции $y = kx$ — это прямая, проходящая через начало координат.*

Линейная функция $y = kx$, где $k \neq 0$, описывает реальные процессы, в которых величины связаны прямо пропорциональной зависимостью, поэтому и её называют *прямой пропорциональностью*.

Примеры прямой пропорциональности

- Зависимость стоимости ткани p от её длины l выражается формулой $p = cl$, где c — цена одного метра ткани.
- Зависимость массы тела m от его объёма V выражается формулой $m = \rho V$, где ρ — плотность.
- Зависимость пути s, пройденного телом с постоянной скоростью v за время t, выражается формулой $s = vt$.

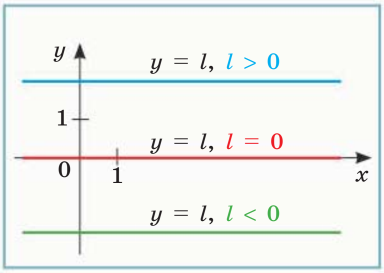


Рис. 5.26

Если $k = 0$, то формула $y = kx + l$, задающая линейную функцию, имеет вид $y = l$. Такая линейная функция принимает одно и то же значение при любом x. Она называется постоянной функцией или константой. *График постоянной функции — это прямая, параллельная оси x (или сама ось x)* (*рис. 5.26*).

СВОЙСТВО ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ Возьмём фрагмент знакомого вам графика роста мальчика, который показывает, как мальчик рос с 2 до 6 лет (*рис. 5.27*).

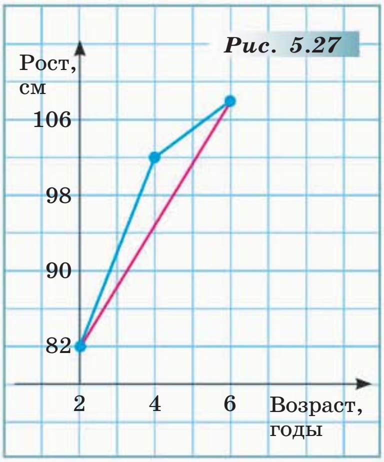


Рис. 5.27

Скорость его роста не была постоянной: с 2 до 4 лет он вырос на 20 см, а с 4 до 6 лет — только на 6 см (синяя линия). А как выглядел бы график, если бы мальчик рос равномерно, с одной и той же скоростью? Нетрудно догадаться, что в этом случае вместо ломаной, состоящей из двух звеньев, мы получили бы отрезок прямой (красная линия). Вообще, *любой процесс, протекающий с постоянной скоростью, описывается линейной функцией*.

АППРОКСИМИРУЮЩАЯ ПРЯМАЯ Линейную функцию часто используют в статистике. Понятно, например, что нет жёсткой зависимости между весом и ростом человека, однако общая тенденция такова: чем выше человек, тем больше его вес. На рисунке *5.28* представлены данные о весе и росте двадцати мужчин. И хотя точки достаточно разбросаны, всё же можно провести прямую, около которой группируется значительная их часть. Эта прямая позволяет прогнозировать наиболее типичный вес при данном росте мужчины. Такие прямые часто называют *аппроксимирующими* (от латинского слова *proxima* — приближение).

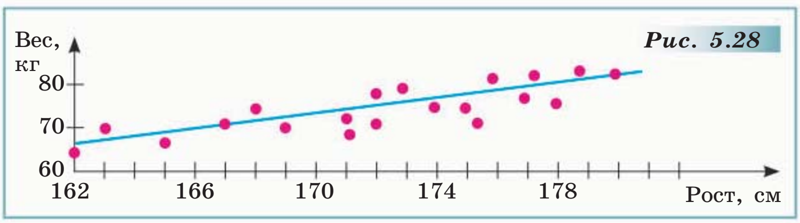
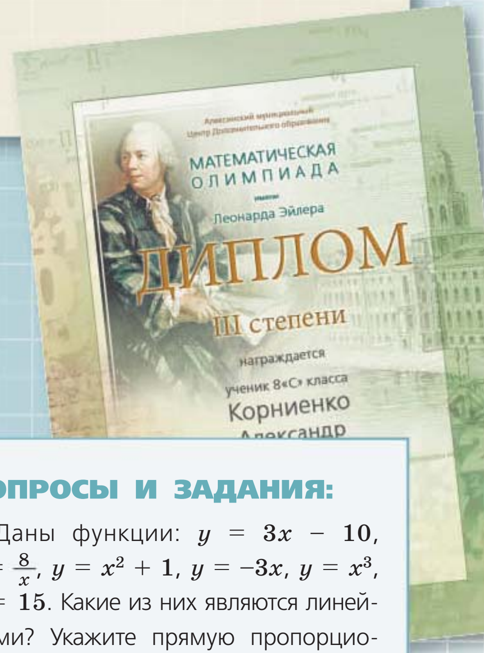


Рис. 5.28

Термин «константа» происходит от латинского слова *constants* — постоянная, неизменная. Кстати, как и мужское имя Константин.

Классификация всех элементарных функций — заслуга Леонарда Эйлера (1707–1783).
Он почти полжизни провёл в России и внёс существенный вклад в становление российской науки. Первые русские академики-математики были его учениками. В настоящее время в России проводится математическая олимпиада имени Леонарда Эйлера для восьмиклассников.



ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Даны функции: $y = 3x - 10$, $y = \frac{8}{x}$, $y = x^2 + 1$, $y = -3x$, $y = x^3$, $y = 15$. Какие из них являются линейными? Укажите прямую пропорциональность и константу.
- Даны линейные функции:
  $y = -5x + 1$, $y = \frac{1}{3}x$,
  $y = -4x$, $y = 2x - 2$.
  Какие из них возрастающие, а какие убывающие?
- Какие процессы описываются линейной функцией?

УПРАЖНЕНИЯ

ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИИ

617 Сумма углов (в градусах) выпуклого многоугольника, имеющего n сторон, вычисляется по формуле $M = 180n - 360$. Объясните, почему эта функция является линейной. Укажите область определения функции. Возрастающей или убывающей является функция? Найдите сумму углов выпуклого многоугольника при $n = 3;\ 4;\ 10$.

618 Дана линейная функция $f(x) = 100x - 2$.
а) Найдите $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$, $f(0{,}3)$, $f(-2{,}4)$.
б) Найдите значение x, при котором $f(x) = 100$, $f(x) = -1$, $f(x) = 0$.

619 МАТЕМАТИКА ВОКРУГ НАС Ещё один пример использования линейной функции в повседневной жизни — это вычисление скидок и процентов. Задайте формулой функцию $y = f(x)$, где x — это первоначальная стоимость товара, а y — его стоимость с 30 %-ной скидкой.

620 МАТЕМАТИКА ВОКРУГ НАС Скорость звука в воздухе примерно 0,3 км/с. Во время грозы вы сначала видите молнию и лишь через некоторое время слышите гром. Задайте формулой функцию $y = f(x)$, где:
а) y — расстояние (в километрах), на котором вы находитесь от места удара молнии, x — время (в секундах) между вспышкой молнии и громом;
б) y — время (в секундах) между вспышкой молнии и громом, x — расстояние (в километрах), на котором вы находитесь от места удара молнии.
Постройте график каждой функции.

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ

621 Покажите схематически, как расположены на координатной плоскости графики функций: $y = \frac{1}{2}x$; $y = -2x - 2$; $y = 2$.

622 Постройте график линейной функции. В каждом случае укажите: 1) возрастающей или убывающей является функция; 2) при каких значениях x значения функции равны 0; больше 0; меньше 0.
а) $y = -0{,}3x + 2$; б) $y = 1{,}2x$; в) $y = 1{,}5x - 2$; г) $y = -0{,}5x - 1$.

Постройте график функции (623–625):

623 а) $y = 3x - 1$, где $-3 \le x \le 3$; б) $y = -2x + 4$, где $x \ge 0$.

624 а) $y = \begin{cases} x + 1, \text{ если } x \le 0, \\ -x + 1, \text{ если } x > 0; \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} 2, \text{ если } x \le 1, \\ 2x, \text{ если } x > 1. \end{cases}$

625 а) $y = \begin{cases} -\frac{x}{3}, \text{ если } x \le -1, \\ \frac{1}{3}, \text{ если } -1 < x \le -1, \\ \frac{x}{3}, \text{ если } x > 1; \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} \frac{x-2}{2}, \text{ если } x \le -2, \\ -2, \text{ если } -2 < x \le 2, \\ \frac{x-6}{2}, \text{ если } x > 2. \end{cases}$

626 В одной системе координат постройте графики линейных функций $f(x) = 2x - 5$ и $g(x) = 0{,}5x + 1$ и определите значения x, при которых $f(x) = g(x)$; $f(x) > g(x)$; $f(x) < g(x)$.

627 Изобразите график описанного процесса: «Альпинист поднимается по отвесной скале. Он начал подъём на высоте 4 м от земли. В течение 3 мин он поднимался со скоростью 0,5 м/мин, затем в течение 2 мин спускался со скоростью 0,3 м/мин, а потом в течение 2 мин поднимался со скоростью 1,5 м/мин».

АНАЛИЗИРУЕМ ГРАФИКИ

628 На рисунке ***5.29*** изображены графики линейных функций. Соотнесите каждый из них с одной из формул:

$y = 2x + 3$; $\quad y = -2x$;

$y = \frac{1}{2}x + 3$; $\quad y = -2x + 3$.

629 На рисунке ***5.30*** изображён график следующего процесса: ванну наполнили водой и через некоторое время воду слили. Опишите по графику, как протекал процесс. Для каждого прямолинейного участка графика определите, с какой скоростью наливалась или выливалась вода.

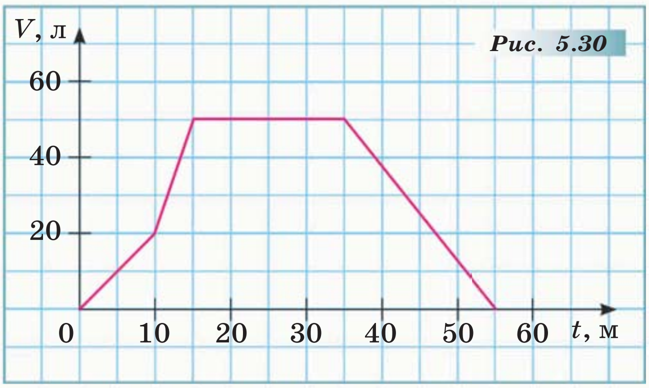


Рис. 5.30

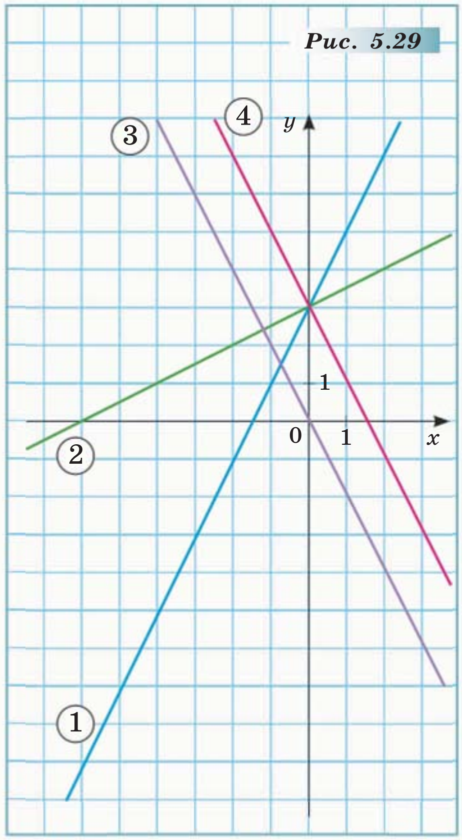


Рис. 5.29

630 Для каких из множеств точек, изображённых на рисунке ***5.31***, можно подобрать аппроксимирующую прямую?

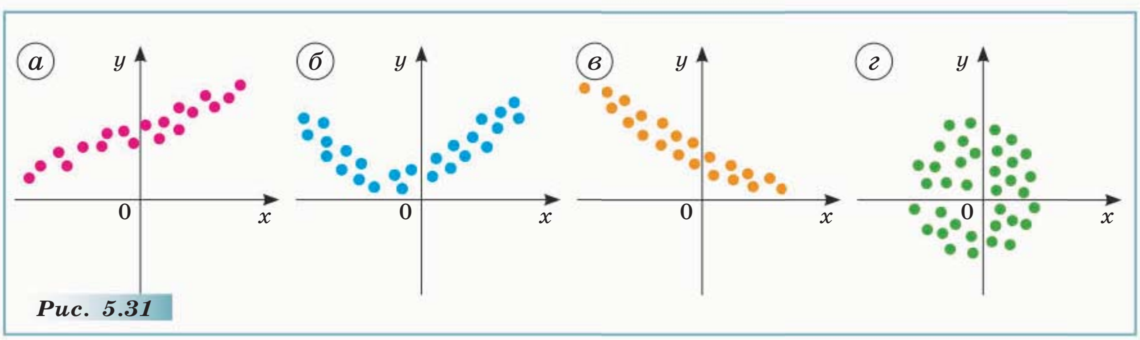


Рис. 5.31

5.6 ФУНКЦИЯ $y = \frac{k}{x}$ И ЕЁ ГРАФИК

ВЫ УЗНАЕТЕ:
- Какую функцию называют обратной пропорциональностью.
- Какая линия является графиком обратной пропорциональности.

Что общего в следующих физических законах: $U = RI$ — закон Ома, $s = vt$ — закон равномерного движения, $pV = RT$ — закон Клапейрона—Менделеева? Чтобы ответить на этот вопрос, выясним, как связаны между собой входящие в них величины.

ОБРАТНАЯ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТЬ Рассмотрим три примера реальных зависимостей.

- Зависимость времени t (в ч), которое затратит пешеход на путь в 12 км, от скорости движения v (км/ч) выражается формулой $t = \frac{12}{v}$.
- Если площадь прямоугольника равна 60 см^2, а одно из его измерений равно a см, тогда второе измерение можно найти по формуле $b = \frac{60}{a}$.
- Зависимость количества товара m, которое можно купить на одну и ту же сумму денег — 500 р., от его цены P (в р.) выражается формулой $m = \frac{500}{p}$.

Все перечисленные формулы имеют вид $y = \frac{k}{x}$, где k — число, отличное от нуля. И общей моделью таких и многих других реальных процессов является функция, которая задаётся этой формулой.

В приведённых примерах величины связаны обратно пропорциональной зависимостью. Следовательно, и функцию, которая задана формулой $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, называют *обратной пропорциональностью*.

Выражение $\frac{k}{x}$ имеет смысл при всех $x \neq 0$, поэтому область определения функции $y = \frac{k}{x}$ — множество всех чисел, кроме 0.

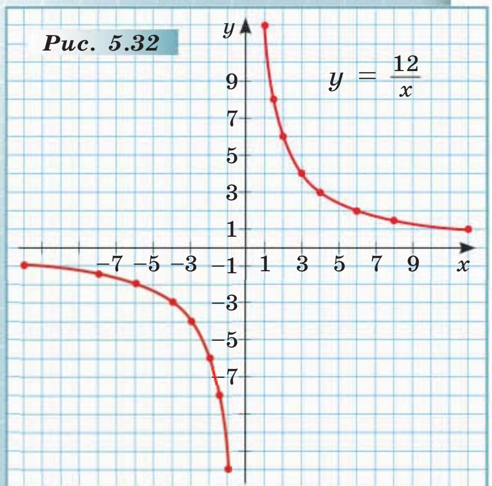


Рис. 5.32

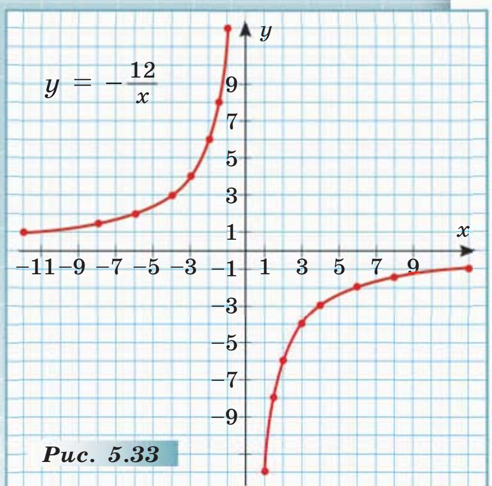


Рис. 5.33

ГРАФИК ОБРАТНОЙ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТИ Выясним, что представляет собой график функции $y = \frac{k}{x}$. Рассмотрим отдельно случаи, когда $k > 0$ и когда $k < 0$. Построим, например, график функции $y = \frac{12}{x}$. Таблицу значений функции составим в два этапа: сначала возьмём несколько положительных значений аргумента, а затем противоположные им отрицательные значения.

x	1	1,5	2	3	4	6	8	12
y	12	8	6	4	3	2	1,5	1
x	−1	−1,5	−2	−3	−4	−6	−8	−12
y	−12	−8	−6	−4	−3	−2	−1,5	−1

Отметим на координатной плоскости точки, координаты которых помещены в таблице, и соединим их плавными линиями — по отдельности для положительных и для отрицательных значений аргумента. Получим график функции $y = \frac{12}{x}$ (*рис. 5.32*).

Вы видите, что график состоит из двух ветвей. Одна из них расположена в первой координатной четверти, а другая — в третьей.

Теперь построим график функции $y = \frac{k}{x}$ для $k < 0$, например график функции $y = -\frac{12}{x}$. Он тоже состоит из двух ветвей, но в этом случае они расположены во второй и в четвёртой координатных четвертях (*рис. 5.33*).

График функции $y = \frac{k}{x}$ называется *гиперболой*. Гипербола состоит из двух ветвей.

ОСОБЕННОСТИ ГРАФИКА График обратной пропорциональности имеет несколько важных особенностей. Посмотрите внимательно на рисунок *5.32*.

Чем больше модуль значения аргумента, тем меньше отличается от нуля значение функции $y = \frac{12}{x}$. Например, если $x = 10$, то $y = 1{,}2$; если $x = 100$, то $y = 0{,}12$; если $x = 1000$, то $y = 0{,}012$. Поэтому ветви графика всё ближе приближаются к оси x, однако никогда не сливаются с ней.

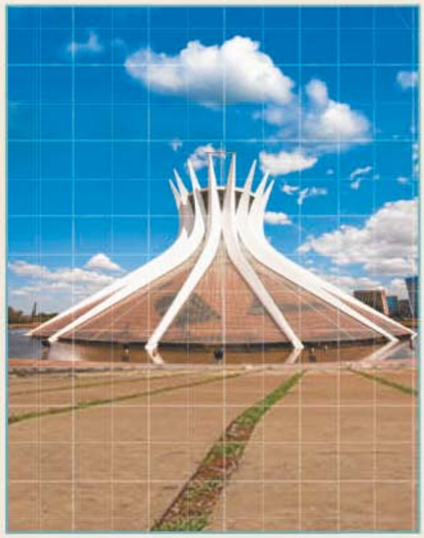
Чем ближе к нулю значения аргумента, тем больше модули значений функции $y = \frac{12}{x}$. Например, если $x = 0{,}1$, то $y = 120$; если $x = 0{,}01$, то $y = 1200$; если $x = 0{,}001$, то $y = 12000$. Поэтому ветви графика всё больше приближаются к оси y, но никогда с ней не сливаются.

График функции $y = \frac{12}{x}$ не пересекает координатные оси; на графике нет ни точки с абсциссой $x = 0$, ни точки с ординатой $y = 0$.

Такой же вид имеет график функции $y = \frac{k}{x}$ при любом $k > 0$.

Если $k > 0$, то функция $y = \frac{k}{x}$ убывает на каждом из двух промежутков области определения. Если $k < 0$, то функция $y = \frac{k}{x}$ возрастает на каждом из этих промежутков.

На фотографии — шедевр архитектуры XX в. — кафедральный католический собор в столице Бразилии, построенный по проекту выдающегося архитектора Оскара Нимейера. Купол собора собран из 16 колонн в виде гипербол.



ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Что общего в законах Ома, равномерного движения и Менделеева—Клапейрона?
- Даны функции: $y = 3x - 1$, $y = \frac{8}{x}$, $y = -\frac{x}{5}$, $y = \frac{5}{x^2}$. Какая из них является обратной пропорциональностью? Ответ обоснуйте.
- Опишите особенности графика функции $y = \frac{k}{x}$ при $k > 0$.
- Чем отличается график функции $y = -\frac{12}{x}$ от графика функции $y = \frac{12}{x}$?
- В каких координатных четвертях расположен график функции: $y = \frac{6}{x}$, $y = -\frac{2}{x}$, $y = -\frac{1{,}2}{x}$, $y = \frac{2{,}5}{x}$?

УПРАЖНЕНИЯ

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ОБРАТНОЙ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТИ

631 Функция задана формулой $y = \frac{6}{x}$. Заполните таблицу и постройте график функции. Определите промежуток, на котором значения функции положительны; отрицательны.

x	1	2	3	4	6	−1	−2	−3	−4	−6
y										

632 Функция задана формулой $f(x) = -\frac{6}{x}$. Заполните таблицу и постройте график функции. Определите промежуток, на котором $f(x) > 0$; $f(x) < 0$.

x	1	2	3	4	6	−1	−2	−3	−4	−6
y										

633 Постройте график функции $y = \frac{8}{x}$. По графику определите:
а) возрастает или убывает функция при $x > 0$; при $x < 0$;
б) на каком промежутке значения функции отрицательны;
в) значение y при $x = 2{,}4$; $-2{,}5$;
г) значение x, при котором $y = 5$; -5.

634 Постройте график функции $y = -\frac{4}{x}$. По графику определите:
а) $f(5)$; $f(-5)$; $f(8)$; $f(-8)$;
б) значение x, при котором $f(x) = 8$; $f(x) = -8$; $f(x) = 6$; $f(x) = -6$;
в) возрастает или убывает функция при $x > 0$; при $x < 0$;
г) на каком промежутке значения функции отрицательны.

635 Графиком какой из функций: $y = \frac{1}{3}x$; $y = \frac{x}{3}$; $y = \frac{3}{x}$ — является гипербола? Постройте эту гиперболу.

636 В одной системе координат постройте графики функций: $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{4}{x}$, $y = -\frac{2}{x}$, $y = -\frac{8}{x}$. Как зависит расположение графика функции $y = \frac{k}{x}$ от модуля коэффициента k?

637 В одной системе координат постройте графики функций и найдите координаты их точек пересечения:
а) $y = -\frac{1}{x}$ и $y = -x$; б) $y = \frac{2}{x}$ и $y = x + 1$.

638 Постройте график функции $y = f(x)$ и определите, при каких значениях a прямая $y = a$ имеет с графиком одну общую точку, если:

а) $f(x) = \begin{cases} x + 2, \text{ при } x \le 2, \\ \frac{8}{x}, \text{ при } x > 2; \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} -x - 1, \text{ при } x < 2, \\ \frac{8}{x}, \text{ при } x > 2. \end{cases}$

ОБРАТНАЯ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТЬ

639 Какое из следующих утверждений верно?
При $k > 0$ график функции $y = \frac{k}{x}$ расположен в координатных четвертях:
а) I и III; б) II и IV; в) I и II; г) III и IV.

640 Не выполняя построения, определите, какие из точек (5; 3), (10; −2), (−0,3; −50), (−0,4; −50) принадлежат графику функции: а) $y = \frac{15}{x}$; б) $y = -\frac{20}{x}$.

641 Площадь прямоугольника со сторонами a см и b см равна 10 см^2. Задайте формулой зависимость a от b. Постройте график зависимости a от b.

642 1) Найдите координаты точек с равными абсциссой и ординатой, через которые проходит график функции: а) $y = \frac{16}{x}$; б) $y = \frac{3}{x}$.
2) Определите координаты точек, в которых:
а) биссектрисы I и III координатных углов пересекают график функции $y = \frac{6}{x}$;
б) биссектрисы II и IV координатных углов пересекают график функции $y = -\frac{15}{x}$.

643 Известно, что точка $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2}\right)$ принадлежит графику функции $y = \frac{k}{x}$. Найдите значение k. Принадлежит ли этому графику точка $\left(\sqrt{2}; -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$? $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2}\right)$?

644 В каких точках гипербола $y = \frac{12}{x}$ пересекает прямую: а) $y = 0{,}5x$; б) $y = -0{,}3$?

645 Найдите координаты какой-нибудь точки, принадлежащей графику функции $y = \frac{15}{x}$ и находящейся от оси x на расстоянии, меньшем, чем 0,1; 0,01.

646 Пользуясь графиком на рисунке ***5.32***, определите, при каких значениях x:
а) $y > 4$; б) $y \geq -6$; в) $y < 3$; г) $y \leq -3$; д) $-1 \leq y \leq 1$.

647 **МАТЕМАТИКА ВОКРУГ НАС** На рисунке ***5.34*** изображён график, показывающий, какое расстояние может проехать автомобиль на одной заправке топливного бака в зависимости от расхода топлива на 100 км. Например, при расходе 15 л топлива на 100 км автомобиль может проехать на одной заправке 400 км.

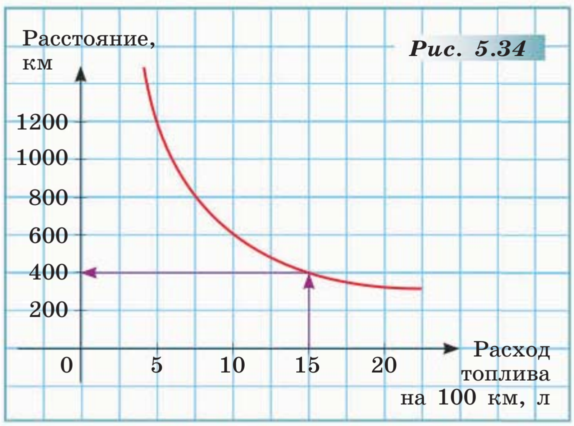


Рис. 5.34

1) По графику установите:
а) Какое расстояние может проехать автомобиль на одной заправке топливом при расходе 10 л топлива на 100 км?
б) Каким должен быть расход топлива, чтобы на одной заправке можно было проехать 1200 км?
2) Рассчитайте вместимость топливного бака, соответствующую графику, изображённому на рисунке.
3) Запишите формулу, описывающую зависимость, изображённую на рисунке.

УЗНАЙТЕ БОЛЬШЕ

ЦЕЛАЯ И ДРОБНАЯ ЧАСТИ ЧИСЛА

Ясно, что целая часть числа 3,7 равна 3, а дробная часть этого числа равна 0,7; целая часть числа 9 равна 9, а дробная часть равна 0. А что считать целой и дробной частью отрицательного числа?

> **!** Целой частью числа x называют наибольшее целое число, не превосходящее x.
> Дробной частью числа x называют разность между числом x и его целой частью.
> Целая и дробная части имеют специальные обозначения: $[x]$ и $\{x\}$ соответственно. Таким образом, $\{x\} = x - [x]$.

Рассмотрим пример. Целая часть числа −4,8 равна −5. Найдём дробную часть этого числа: $\{-4{,}8\} = 4{,}8 - [-4{,}8] = -4{,}8 - (-5) = -4{,}8 + 5 = 0{,}2$.
Построим график функции $y = [x]$.
Если $0 \le x < 1$, то $[x] = 0$. Значит, на промежутке $[0;\ 1)$ график функции $y = [x]$ совпадает с прямой $y = 0$. Однако $[1] = 1$, значит, при $x = 1$ график совершает скачок. Чтобы показать это, на графике ставят стрелку (***рис. 5.35, а***).
Если $1 \le x < 2$, то $[x] = 1$, т. е. на промежутке значения y снова будут постоянны, а при $x = 2$ будет новый скачок графика.
Рассматривая последовательно промежутки области определения, мы построим график, состоящий из горизонтальных «ступенек» (***рис. 5.35, б***).

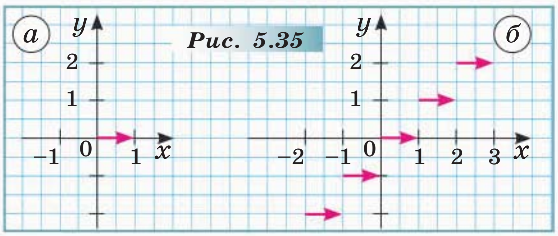


Рис. 5.35

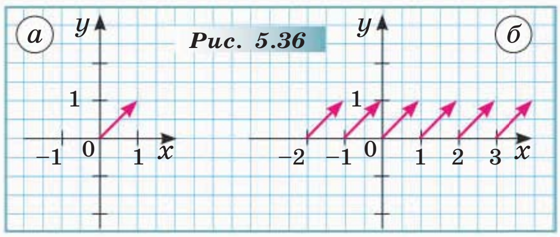


Рис. 5.36

Построим график функции $y = \{x\}$, воспользовавшись тем, что $\{x\} = x - [x]$.
Если $0 \le x < 1$, то $[x] = 0$. Значит, на промежутке $[0;\ 1)$ $\{x\} = x - 0$, и график здесь совпадает с прямой $y = x$ (***рис. 5.36, а***).
Если $1 \le x < 2$, то $[x] = 1$. Значит, на промежутке $[1;\ 2)$ $\{x\} = x - 1$, и график здесь совпадает с прямой $y = x - 1$.
Продолжая, мы будем получать одинаковые отрезки прямых (со стрелками на правом конце), исходящие из целых точек на оси x, наклоненные к оси под углом 45°. Получился очень неожиданный график (***рис. 5.36, б***).

1 Найдите целую и дробную части числа: 7,25; $3\frac{1}{3}$; 120; −14; −3,9; $-45\frac{2}{7}$. Запишите результат, используя обозначения $[x]$ и $\{x\}$.

2 При каких значениях x выполняется равенство $[x] = 5$; $[x] = -3$? Укажите несколько значений x, для которых $\{x\} = \frac{1}{2}$.

3 Постройте график функции:

а) $y = [x - 1]$; в) $y = [x] - 2$; д) $y = [2x]$; ж) $y = [x] + 2$;
б) $y = -[x]$; г) $y = [-x]$; е) $y = -\{x\}$; з) $y = \{-x\}$.

ПОДВЕДЁМ ИТОГИ

Переменную y называют *функцией* переменной x, если каждому значению x из некоторого числового множества соответствует одно определённое значение переменной y. Независимую переменную называют *аргументом*. Все значения, которые может принимать аргумент, образуют *область определения функции*.	$y = f(x)$: y — функция, x — аргумент. $S = a^2$, где S — площадь квадрата, a — его сторона: S — функция, a — аргумент. Область определения функции $f(x) = x^2 - 2x$ — множество всех чисел, а функции $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x}$ — множество всех чисел, кроме 0 и 2.
Значения аргумента, при которых функция обращается в нуль, называют *нулями функции*. Функции, которые возрастают на всей области определения, называют *возрастающими*. Функции, которые убывают на всей области определения, называют *убывающими*.	Функция $y = x + 5$ обращается в 0 при $x = -5$ — это нуль функции. Функция $y = x$ — возрастающая, функция $y = -x$ — убывающая.

1 В таблице приведены данные температуры воздуха 10 апреля в городе Грибове.

Время, ч	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Температура, °C	1	0	−2	−3	−2	0	6	10	10	7	4	3	2

Постройте график температуры и определите:
а) в какое время суток температура возрастала; убывала; была положительной;
в) максимальное значение температуры в течение суток;
г) в каких границах менялась температура в течение суток.

2 На примере функции $y = \frac{1}{x^2 - 2x}$ объясните, как находят область определения функции, заданной формулой.

3 По графику **5.37** функции $y = f(x)$, заданной на промежутке $[-5; 5]$, определите:
а) значение y при $x = -1$; 3;
б) значения x, при которых $y = -1$; 1;
в) нули функции;
г) значения аргумента, при которых функция положительна;
д) промежуток убывания функции;
е) наибольшее значение функции.

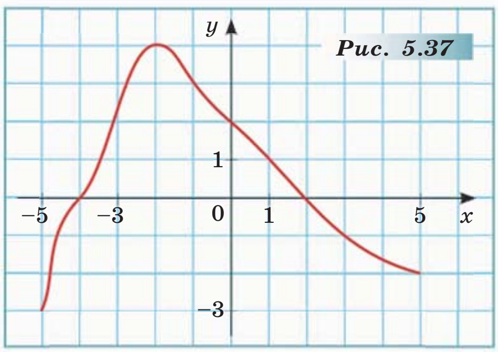


Рис. 5.37

4 Функция задана формулой $y = 4 - x^2$.
а) Найдите значение функции при $x = 0$; −3.
б) При каких значениях x значение функции равно −3?

5 Найдите нули функции $y = x^2 - 5x$.

Функция, которую можно задать формулой вида $y = kx + l$, где k и l — некоторые числа, называется линейной.

Линейная функция $y = kx$, где $k \neq 0$, называется *прямой пропорциональностью*.

Графиком линейной функции является прямая.

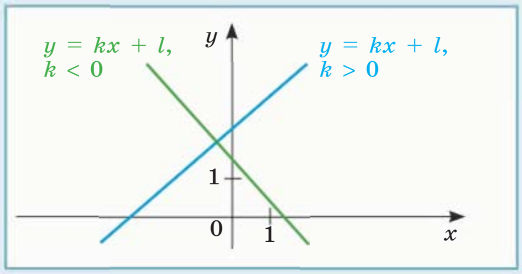
Если $k > 0$, то линейная функция является возрастающей; если $k < 0$, то линейная функция является убывающей.

Примеры линейных функций:

$y = 3x + 7$;

$y = -0,5x - 10$;

$y = \frac{3}{7}x$.



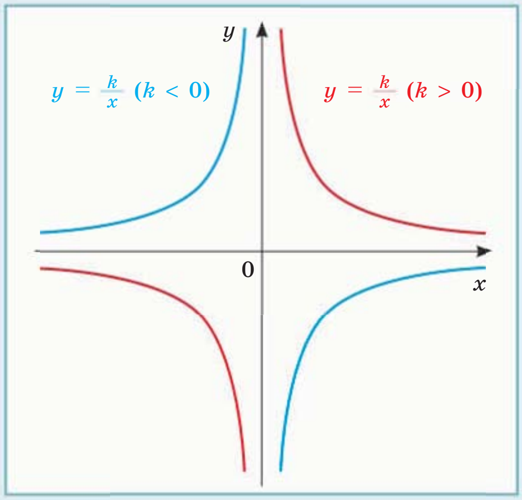
Функция, которая задана формулой $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, называется *обратной пропорциональностью*.

Функции $y = \frac{11}{x}$, $y = -\frac{3}{x}$ — обратные пропорциональности.

График функции $y = \frac{k}{x}$ называется *гиперболой*. Если $k > 0$, то ветви гиперболы расположены в I и III координатных четвертях; если $k < 0$, то ветви гиперболы расположены во II и IV координатных четвертях.

При $k > 0$ функция $y = \frac{k}{x}$ убывает на каждом из двух промежутков области определения.

При $k < 0$ функция $y = \frac{k}{x}$ возрастает на каждом из двух промежутков области определения.



6 От Москвы до Ржева 240 км. Автобус выходит из Москвы и едет во Ржев со средней скоростью 60 км/ч. Расстояние y, которое остаётся проехать до Ржева, — это функция времени x движения автобуса. Задайте эту функцию формулой. Постройте график функции.

7 Функция задана формулой $y = 4x - 10$. Найдите $f(0)$, $f(-1,5)$. Найдите значения x, при которых $f(x) = 18$, $f(x) = 0$.

8 Постройте график функции: а) $y = -\frac{1}{3}x$; б) $y = 1,5x + 4$; в) $y = -0,5x - 1$. При каких значениях x значения функции равны 0? больше 0? меньше 0? Возрастающей или убывающей является функция?

9 Постройте график функции: а) $y = \frac{6}{x}$; б) $y = -\frac{8}{x}$. Укажите область определения функции. При каких значениях x значения функции больше 0? меньше 0? Возрастает или убывает функция при $x < 0$? при $x > 0$?

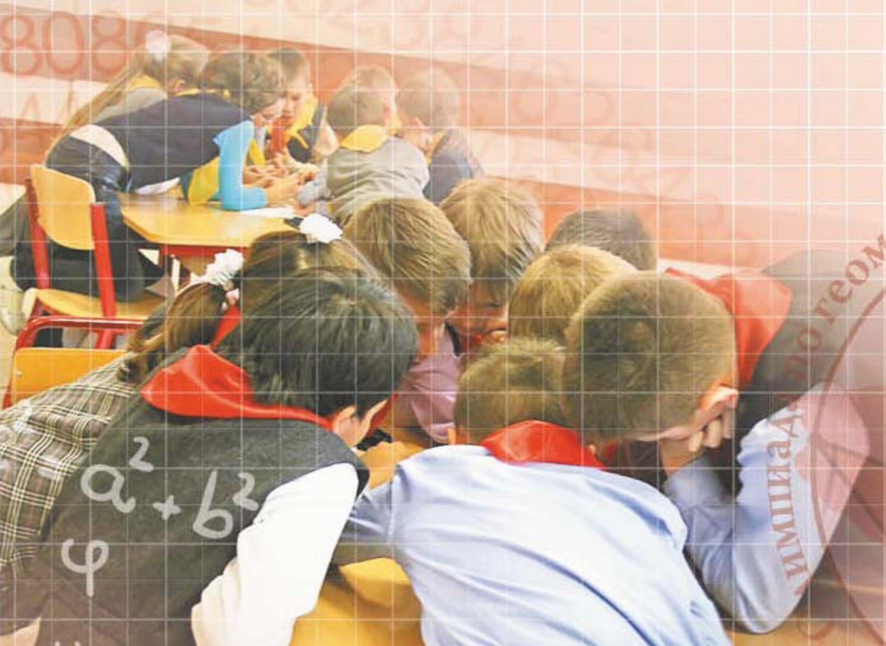
ГЛАВА 6

ВЕРОЯТНОСТЬ И СТАТИСТИКА

- СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ
- ВЕРОЯТНОСТЬ СЛУЧАЙНОГО СОБЫТИЯ
- КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ
- СЛОЖНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ
- ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ

Узнайте больше

- СЛОЖЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ



МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СОРЕВНОВАНИЯ

Помимо математических олимпиад и турниров, в последние годы появилось много новых увлекательных форм очных и заочных, личных и командных математических соревнований.

Большую популярность обрели математические бои. В этих соревнованиях участвуют две команды, которые в отведённое время решают предложенные жюри задачи, после чего и происходит сам математический бой. Одна команда вызывает другую на бой, рассказывает о решении задачи, другая команда ей оппонирует, жюри оценивает результаты. Бой состоит из нескольких раундов, а ещё есть конкурс капитанов и возможность сыграть в математическую игру.

Ещё одна популярная форма командных соревнований — математическая регата, где участвуют уже не две команды, а больше, в каждой из которых 4 человека. В регате тоже несколько увлекательных туров. Подробные правила математических боёв и регат можно найти на соответствующих страницах в Интернете.

Такие математические соревнования можно провести в каждой школе, в каждом городе и посёлке.

Появились в последние годы и новые олимпиады. Отметим Всероссийскую олимпиаду по геометрии имени И. Ф. Шарыгина для школьников старших классов. Она посвящена памяти замечательного учёного, педагога и популяризатора геометрии Игоря Фёдоровича Шарыгина (1937–2004). Олимпиада, в оргкомитет и жюри которой вошли известные учёные, педагоги, энтузиасты математического просвещения из разных российских регионов, проводится ежегодно начиная с 2005 года и состоит из двух туров — заочного и финального.

6.1 СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

ВЫ ВСПОМНИТЕ:

- Статистические характеристики, изученные ранее.

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Какую статистическую характеристику называют медианой.

Средние характеристики используются в статистике для того, чтобы наиболее точно описывать различные ситуации. В этом пункте вы познакомитесь с медианой.

ХАРАКТЕРИСТИКИ СРЕДНЕГО И РАЗБРОСА Давайте вспомним известные вам статистические характеристики.

Пример 1. В течение года вёлся учёт числа заболеваний учеников 8А класса.

Фамилия	*N*	Фамилия	*N*	Фамилия	*N*
1. Амиров Т.	2	8. Емельянов И.	1	15. Николаев А.	4
2. Антоненко О.	4	9. Иванов Д.	6	16. Петрова О.	2
3. Борисов И.	3	10. Ильясова З.	3	17. Родионов М.	1
4. Владимиров О.	2	11. Клементьев П.	0	18. Степанян А.	3
5. Гиреева А.	5	12. Леонидов Ф.	2	19. Тарасова Д.	6
6. Дмитриева А.	3	13. Ломидзе В.	4	20. Шварц Я.	5
7. Егорова С.	4	14. Михайлова И.	4		

N — число заболеваний за учебный год

Общее число всех заболеваний — 64

Число учеников — 20

Рассмотрение этих данных показывает, что *наибольшее* число заболеваний равно 6, а *наименьшее* — 0, следовательно, размах равен 6. Чтобы найти *среднее арифметическое* этого ряда, надо найти общее число всех заболеваний за год и разделить его на число учеников. Получим $\frac{64}{20} = 3{,}2$, т. е. среднее арифметическое числа заболеваний в 8А классе равно 3,2.

Несложно заметить, что многие числа в ряду данных повторяются. Для таких рядов есть более удобный способ нахождения среднего арифметического.

Составим таблицу: в первом её столбце поместим наблюдаемые значения — числа 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6; второй столбец будем использовать для регистрации появлений каждого из этих значений; в третий столбец занесём число его появлений.

N	Подсчёты	Число повторений
0	/	1
1	//	2
2	////	4
3	////	4
4	~~////~~	5
5	//	2
6	//	2

! Число, показывающее, сколько раз данное событие наблюдалось в серии экспериментов, называют числом повторений случайного события.

При нахождении среднего арифметического каждую сумму равных слагаемых можно заменить произведением этого слагаемого на число повторений:

$$\frac{0\cdot1 + 1\cdot2 + 2\cdot4 + 3\cdot4 + 4\cdot5 + 5\cdot2 + 6\cdot2}{1 + 2 + 4 + 4 + 5 + 2 + 2} = \frac{64}{20} = 3{,}2.$$

Мы получили тот же результат, но за меньшее количество действий, что важно, если ряд «длинный».

Из таблицы можно найти *моду* ряда данных. Мода этого ряда равна 4, поскольку число 4 встречается в ряду 5 раз и никакое другое число не встречается в нём 5 или более раз.

МЕДИАНА

Пример 2. В конце года 11 учеников 8А класса сдавали норматив по бегу на 100 метров. Были показаны следующие результаты в секундах (см. список).

Результаты по бегу на 100 метров учеников 8А класса

Амиров Т.	– 15,3;
Гиреева А.	– 21,8;
Емельянов И.	– 16,1;
Ильясова З.	– 19,9;
Клементьев П.	– 14,7;
Леонидов Ф.	– 15,4;
Ломидзе В.	– 16,9;
Михайлова И.	– 18,4;
Петрова О.	– 25,1;
Степанян А.	– 15,5;
Тарасова Д.	– 20,2.

После того как ребята пробежали дистанцию, к учителю подошел Вахтанг Ломидзе и спросил, какой у него результат. «Самый средний результат: 16,9 секунды», — ответил учитель. И пояснил: «Твой результат средний, потому что 5 человек пробежали лучше, чем ты, и 5 — хуже, то есть ты как раз посередине».

На языке статистики такой результат, как у Вахтанга, и называют *медианой* ряда данных.

Обычно медиану ищут в случае, когда числа в ряду являются какими-либо показателями и надо найти, например, человека, показавшего *средний* результат, фирму со *средней* годовой прибылью, авиакомпанию, предлагающую *средние* цены на билеты, и т. п.

Для того чтобы найти медиану ряда чисел, нужно сначала их упорядочить. В нашем случае упорядоченный ряд выглядит так:

14,7; 15,3; 15,4; 15,5; 16,1; 16,9; 18,4; 19,9; 20,2; 21,8; 25,1

пять чисел, меньших чем 16,9 — *медиана* — *пять чисел, бо́льших чем 16,9*

Чисел 11, медианой является 6-е число, т. е. 16,9.

Таким образом, медиана — это число, которое разделяет упорядоченный ряд данных на две части, одинаковые по количеству членов.

! Чтобы найти медиану произвольного ряда чисел, их прежде всего надо упорядочить — записать по возрастанию.

- Медианой упорядоченного ряда, состоящего из нечётного числа членов, является число, которое находится посередине.
- Медианой упорядоченного ряда, состоящего из чётного числа членов, является среднее арифметическое двух чисел, находящихся посередине.

Главным преимуществом медианы перед средним арифметическим является свойство устойчивости: медиана не изменится ни при увеличении наибольшего из крайних чисел упорядоченного ряда, ни при уменьшении наименьшего, ни при одновременном увеличении наибольшего и уменьшении наименьшего чисел.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- По таблице из примера 1 найдите среднее число заболеваний отдельно для девочек и мальчиков.
- Используя таблицу из примера 1, найдите медиану ряда чисел.
- По данным из примера 2 найдите средний результат отдельно у девочек и у мальчиков.
- Поясните свойство устойчивости медианы на примере ряда данных из примера 2.

УПРАЖНЕНИЯ

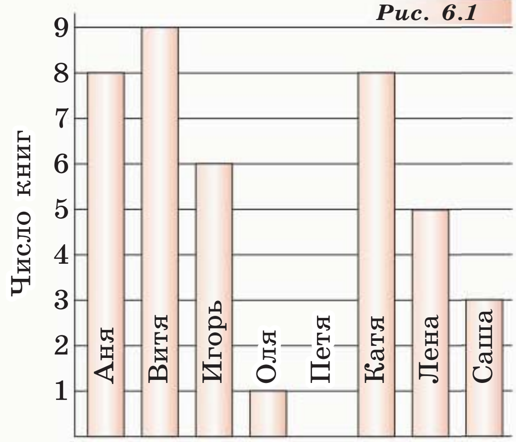
ОПРЕДЕЛЯЕМ СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РЯДА ДАННЫХ

648 В таблице представлены данные о производстве электроэнергии в России в 2000–2008 гг. (в миллиардах киловатт-часов).

Годы	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Произведено	877,8	891,3	891,3	916,3	931,9	953,1	995,8	1015,3	1040,4

Найдите среднее арифметическое и медиану представленного ряда чисел.

Рис. 6.1



649 Столбчатая диаграмма (***рис. 6.1***) показывает, сколько книг прочитал каждый из ребят за летние каникулы. Найдите размах этих данных, среднее арифметическое и медиану.

650 В таблице зафиксирована посещаемость выставки прикладного искусства северных народов в течение одной недели.

День недели	П	В	С	Ч	П	С	В
Число посетителей	711	690	670	539	840	986	1024

Для полученного ряда данных найдите: а) размах; б) среднее арифметическое; в) медиану.

651 В магазине «Спектр» представлено несколько моделей телевизоров с различными размерами экрана (длина диагонали в дюймах):

Модель	A	B	C	D	E	F	G	H
Размер экрана	20	36	36	36	25	32	25	32

а) Какой самый распространённый размер экрана в этом магазине? (Найдите моду данного ряда.)
б) Каков размер экрана «среднего» телевизора? (Найдите медиану данного ряда.)

652 В течение года Лена получила следующие отметки за контрольные работы по алгебре: одну двойку, четыре тройки, шесть четвёрок, три пятёрки. Занесите эти данные в таблицу частот. Найдите среднее арифметическое, моду и медиану ряда отметок. Какую из полученных характеристик Лена предпочла бы иметь в качестве годовой отметки?

Отметка	Число повторений
«2»	1
«3»	4
«4»	6
«5»	3

653 **МАТЕМАТИКА ВОКРУГ НАС** Выпишите свои отметки по алгебре, полученные в течение года, и найдите среднее арифметическое, медиану и моду ряда отметок. Сделайте вывод о своих успехах. Вычислите среднее арифметическое четвертных отметок и сделайте прогноз, какая годовая отметка вам будет выставлена.

654 Маша, Саша, Катя, Лена, Ваня и Миша пошли в пиццерию. Ваня съел 5 кусков пиццы, Миша, Саша и Лена — по 3 куска, Катя — 2 куска, Маша — 1 кусок. Найдите все известные вам средние этих данных. Как изменились бы эти величины, если бы Ваня съел не 5, а 7 кусков?

655 1) Президент компании получает 1 000 000 р. в месяц, четверо его заместителей получают по 200 000 р. в месяц, а 20 служащих — по 100 000 р. в месяц. Найдите все средние зарплат компании.
2) Компания должна предоставить в муниципальную статистическую службу информацию о средней зарплате работников компании и о зарплате каждого работника компании. Какие из найденных вами данных надо предоставить в каждом случае?
3) Какой показатель: медиана зарплат или их среднее арифметическое — представляется вам более объективным?

656 У группы из 20 восьмиклассников спросили, сколько примерно часов в день они тратят на приготовление домашних заданий. Ответы представлены на диаграмме (***рис. 6.2***).
а) Найдите моду данного ряда.
б) Сколько времени в день тратит в среднем ученик из этой группы на приготовление домашних заданий? (Найдите среднее арифметическое данного ряда.)
в) Сколько времени в день тратит средний ученик на приготовление домашних заданий? (Найдите медиану данного ряда.)

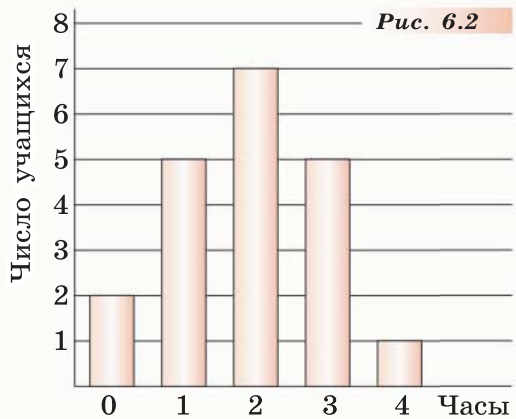


Рис. 6.2

657 **МАТЕМАТИКА ВОКРУГ НАС** Соберите данные о стоимости одного из основных продуктов питания в магазинах вашего микрорайона (например, о стоимости одного литра молока). Вычислите статистические характеристики полученного вами ряда чисел.

658 Для службы в Президентском полку отбирают призывников с ростом не менее 175 см и не более 190 см. Есть три группы призывников, про которые известно, что:
в первой группе средний рост равен 180 см;
во второй группе максимальный рост равен 189 см;
в третьей группе медиана ряда ростов равна 176 см.

Иван утверждает, что в одной из этих групп не менее половины призывников заведомо годны к службе в Президентском полку. Для каждой группы постройте контрпример, опровергающий это утверждение.

659 У Катиной кошки 6 котят. Медиана масс тел котят равна 240 г. Масса Катиного любимого котёнка равна 250 г. Верны ли следующие утверждения?
A: Более половины котят имеют массу меньше, чем Катин любимец.
B: Менее половины котят имеют массу больше, чем Катин любимец.
C: Среди котят обязательно есть котёнок, масса которого равна 230 г.

6.2

ВЕРОЯТНОСТЬ СЛУЧАЙНОГО СОБЫТИЯ

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Как связаны частота случайного события и вероятность.

Обычай решать спорные вопросы с помощью подбрасывания монеты связан с предположением о том, что орёл и решка выпадают примерно с равной частотой. Это предположение подвергали экспериментальной проверке учёные разных стран и эпох.

Понятие вероятности исторически связано с азартными играми, особенно с играми в кости. До появления понятия вероятности формулировались в основном комбинаторные задачи подсчёта числа возможных исходов при бросании нескольких костей, а также задача раздела ставки между игроками, когда игра закончена досрочно.

Художник Дж. Креспи (1665–1747). Игроки в кости

ИСТОРИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА В XVIII в. французский естествоиспытатель Жорж Луи де Бюффон не поленился провести 4040 экспериментов с подбрасыванием монеты: орёл выпал 2048 раз, т. е. у Бюффона частота появления орла получилась равной $\frac{2048}{4040} \approx 0{,}5069$. В начале XX в. английский математик Карл Пирсон провёл уже 24000 экспериментов, орёл выпал 12012 раз. Значит, у Пирсона частота появления орла получилась равной $\frac{12\,012}{24\,000} = 0{,}5005$. В таблице помещены результаты, полученные разными исследователями начиная с XVIII в.

Исследователь	Число экспериментов	Частота выпадения орла
Бюффон	4040	0,5069
Де Морган	4092	0,5005
Джевонс	20480	0,5068
Романовский	80640	0,4923
Феллер	10000	0,4979
Пирсон	24000	0,5005

ЧАСТОТА И ВЕРОЯТНОСТЬ Нетрудно заметить, что серии экспериментов, проведённые в разные эпохи и в разных странах, дают похожий результат: при многократном подбрасывании монеты частота выпадения орла стабилизируется около числа 0,5. Говорят, что **вероятность** выпадения орла равна 0,5. Так как во всех этих сериях экспериментов решка появлялась также примерно в половине случаев, то и вероятность выпадения решки равна 0,5. Вообще вероятность и частота случайного события связаны между собой.

! Если случайный эксперимент повторять достаточно много раз, то частота интересующего нас события будет близка к его вероятности.

Французское слово «*probabilite*» означает «вероятность». Отсюда и происходит обозначение вероятности латинской буквой *P*.

Вероятность события обозначается большой латинской буквой P. Если обозначить событие «выпадет орёл» буквой A, а событие «выпадет решка» буквой B, то полученный результат можно записать так:

$$P(A) = 0{,}5, \quad P(B) = 0{,}5.$$

В некоторых практических ситуациях вероятность принято выражать в процентах; например, на сайтах погоды можно прочесть «Вероятность осадков 56 %». Математик же сказал бы, что вероятность осадков равна 0,56.

Тот факт, что вероятность появления орла равна 0,5, не означает, что если вы несколько раз подбросите монету, то орёл появится ровно в половине случаев. Но если число экспериментов велико, можно сделать прогноз, что орёл выпадет примерно в половине случаев. Вообще *по вероятности события можно прогнозировать частоту появления этого события в будущем*.

МОНЕТА И КНОПКА В случае с подбрасыванием монеты и не проводя экспериментов естественно предположить, что вероятность выпадения каждой её стороны равна 0,5. Но во многих ситуациях без проведения экспериментов предсказать вероятность случайного события практически невозможно. Например, если монету заменить на кнопку. В таких случаях оценить вероятность можно только по частоте, которая определяется в ходе выполнения многократных экспериментов. При этом чем больше проведено экспериментов, тем точнее можно оценить вероятность события. При проведении большого числа экспериментов с кнопкой частота появления случайного события C: остриём вниз — стабилизируется около числа 0,45. Значит, вероятность выпадения кнопки остриём вниз примерно равна 0,45: $P(C) = 0{,}45$.

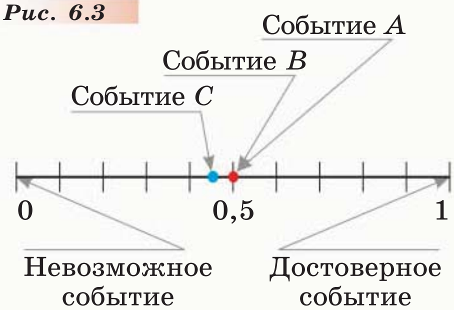
ВЕРОЯТНОСТНАЯ ШКАЛА Вероятность случайного события — это число, заключённое между 0 и 1. Если событие является достоверным, т. е. если оно обязательно происходит при каждом повторении эксперимента, то его частота равна 1, и естественно считать, что и его вероятность равна 1. Невозможное событие не происходит ни при каком повторении эксперимента, поэтому вероятность невозможного события считают равной 0.

Если случайное событие обозначить буквой X, то $0 \le P(X) \le 1$. Этому факту можно дать геометрическое истолкование с помощью вероятностной шкалы (***рис. 6.3***).

Если вероятность события мала, то событие будет наступать очень редко. Такие события называют **маловероятными**. Так, маловероятно, что в Москве в январе температура опустится до −42 °C. Но исключать этого нельзя: в истории метеонаблюдений такая температура наблюдалась в 1882 и 1940 гг. В остальные годы было теплее, поэтому событие «в Москве в январе температура будет выше −45 °C» можно считать **практически достоверным**. Нужно помнить, что и самое маловероятное событие может однажды произойти, и не пренебрегать этим, если речь идёт о серьёзных последствиях.

Карл Пирсон (1857–1936) стал одним из основоположников биометрики — научной отрасли, которая расположена на стыке биологии и статистики и связанна с использованием статистических методов в научных исследованиях в биологии, медицине, здравоохранении и эпидемиологии.

Рис. 6.3



ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- По данным таблицы определите, чему равна частота выпадения решки в каждом исследовании.
- Как связаны частота случайного события и его вероятность?
- Где на вероятностной шкале надо расположить событие «кнопка упала остриём вверх»?

УПРАЖНЕНИЯ

ПРОВОДИМ ЭКСПЕРИМЕНТ И ОЦЕНИВАЕМ ВЕРОЯТНОСТЬ

660 Проведите 150 экспериментов по подбрасыванию металлической крышки от бутылки. Оцените вероятность каждого из возможных исходов случайных экспериментов: крышка упадёт вверх дном или вверх зубцами. Запишите результат, используя символику.

661 1) Проведите 50 экспериментов по подбрасыванию игрального кубика. Используя данные эксперимента, оцените вероятность выпадения двух очков. Сделайте прогноз относительно вероятности выпадения 6 очков.
2) Используя данные эксперимента, оцените вероятность:
а) выпадения чётного числа очков;
б) того, что выпадет не меньше 3 очков;
в) того, что число выпавших очков не равно 6.

662 Вероятность выпадения орла при бросании монеты равна 0,5. Игорь провёл 500 экспериментов, в которых орёл выпал 238 раз. На сколько частота выпадения орла в эксперименте Игоря отличается от вероятности этого события?

663 Проведите всем классом эксперимент по одновременному подбрасыванию двух монет.
1) Запишите все возможные исходы случайного эксперимента.
2) Разбейтесь на пары, каждая пара должна провести по 100 экспериментов и внести результаты в таблицу.
3) Сведите в общую таблицу все полученные результаты.
4) Оцените вероятность каждого из возможных исходов.

ОЦЕНИВАЕМ ВЕРОЯТНОСТЬ

664 По статистике на каждые 1000 выпущенных лампочек приходится 3 бракованные. Какова вероятность купить бракованную лампочку? исправную лампочку?

665 Человек купил две батарейки, одна из которых оказалась неисправной. Можно ли исходя из этого с уверенностью утверждать, что вероятность купить неисправную батарейку равна 0,5?

666 Вероятность того, что черенок нового сорта розы приживётся, составляет 0,7. Какое число укоренившихся черенков можно ожидать, если посажено 150 черенков?

667 Демографы утверждают, что вероятность рождения близнецов приблизительно равна 0,012. В скольких случаях из 10000 рождений можно ожидать появление близнецов?

668 При проведении 1000 случайных экспериментов событие A произошло в 998 случаях. Является ли оно достоверным? Дайте словесные характеристики события A.

669 В таблице приведены данные о продаже фирмой автомобилей за прошлый год.

Модель	A	B	C	D	E
Размер экрана	132	787	424	108	320

а) Оцените вероятность того, что произвольный покупатель выберет в этом году машину марки B. Ответ округлите до сотых. (Используйте калькулятор.)

б) Автомобили марок A, B, C — отечественные, D и E — иностранные. Оцените вероятность того, что произвольный покупатель выберет отечественный автомобиль.

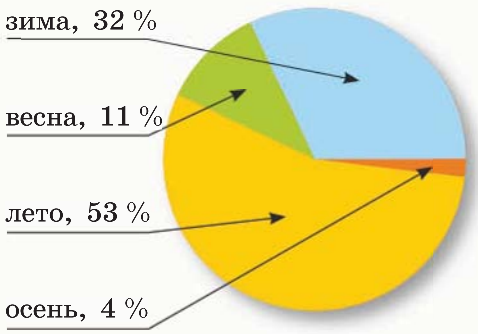


Рис. 6.4

670 Среди сотрудников компании был проведён опрос, в какое время года они предпочитают брать отпуск. Результаты представлены на круговой диаграмме (***рис. 6.4***). Оцените вероятность того, что случайно выбранный сотрудник предпочитает отдыхать: а) зимой; б) летом или осенью; в) не летом.

671 Учёные-орнитологи провели обследование гнездовий речной крачки на острове. Ими было обнаружено 64 кладки, в которых находилось: 1 яйцо — в 17 гнёздах, 2 яйца — в 28 гнёздах, 3 яйца — в 19 гнёздах. Оцените вероятность того, что в найденной кладке речной крачки будет 3 яйца.

672 Из пруда было выловлено 90 рыб, которых пометили и выпустили обратно в пруд. Через неделю из пруда выловили 84 рыбы, из которых 5 оказались помеченными. Сколько примерно рыб в этом пруду?

Неверно! Вероятность события A составляет 0,3. Кирилл утверждает, что при проведении 1000 соответствующих случайных экспериментов событие A наступит ровно в 300 случаях из них. Объясните, в чём его ошибка.

ВЕРОЯТНОСТНАЯ ШКАЛА

673 Расположите на вероятностной шкале случайные события из пунктов а) и б) задания 670.

674 Где на вероятностной шкале расположены маловероятные события? практически достоверные события? практически невероятные события?

675 На рулоне обоев имеется надпись $l = 20 \pm 0{,}1$ м, где l — длина обоев в рулоне. Расположите на вероятностной шкале события:

A: длина обоев равна 19,95 м;
B: длина обоев равна 20 м;
C: длина обоев равна 18 м;
D: длина обоев равна 25 м.

6.3 КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Как найти вероятность равновозможных событий.

Какой бы длинной ни была серия экспериментов, подсчитанная частота появления события даст только приближённое значение вероятности. И кроме того, далеко не всегда такую серию можно осуществить реально. Для экспериментального вычисления возможности выигрыша в лотерею нам может просто не хватить денег. К счастью, во многих ситуациях существуют более «экономичные» способы подсчёта вероятностей.

Исходы A и B равновозможны

1) Бросаем монету.
 A: выпал орёл;
 B: выпала решка.

2) Бросаем игральный кубик.
 A: выпало 1 очко;
 B: выпало 5 очков.

3) Вытягиваем экзаменационный билет.
 A: вытянут билет № 1;
 B: вытянут билет № 24.

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СОБЫТИЯ В результате случайного эксперимента могут произойти различные случайные события. Например, при бросании игральной кости можно рассмотреть такие события:

A: выпало 2 очка; B: выпало число очков, большее четырёх; C: выпало чётное число очков.

При этом событие B наступает, если наступает одно из двух случайных событий — «выпала пятёрка» или «выпала шестёрка». Точно так же событие C можно разбить на три события — выпало 2, 4 или 6 очков. А вот событие A на более простые события не разбивается.

Случайные события, которые нельзя разделить на более простые, называют элементарными событиями или исходами.

Исходы, которые имеют равные шансы, называют равновозможными. При подбрасывании монеты возможны два исхода — может выпасть орёл, может выпасть решка. Если монета «правильная», то эти исходы равновозможны. Говорить о равновозможности элементарных событий можно во многих ситуациях — при бросании монеты или кубика, розыгрыше лотерей, проведении экзаменов по билетам, но только если кубик и монета правильные, лотерея честная и т. д.

ВЕРОЯТНОСТИ РАВНОВОЗМОЖНЫХ ИСХОДОВ *Если все исходы случайного эксперимента равновозможны, то их вероятности одинаковы.* Пусть число этих элементарных исходов равно n, тогда вероятность каждого из них равна $\frac{1}{n}$.

Например, при бросании правильного кубика 6 равновозможных исходов, значит, вероятность каждого из них равна $\frac{1}{6}$. Но если кубик неправильный, то исходы эксперимента при его подбрасывании неравновозможны, и без проведения опытов найти вероятность какого-либо из них не удастся.

У игральной кости 10 граней. Сколько возможно исходов?

Пример 1. Для проведения экзамена приготовили 24 билета. Андрей не выучил один билет и очень боится

его вытянуть. Какова вероятность того, что Андрею достанется невыученный билет? У эксперимента «вытянуть наугад один билет» всего 24 исхода, и все они равновероятны. Поэтому вероятность того, что Андрею достанется невыученный билет, равна $\frac{1}{24}$.

В ходе эксперимента нас может интересовать вероятность не только элементарного, но и более сложного случайного события. Например: какова вероятность того, что при подбрасывании кубика выпадет чётное число очков? Как вы уже знаете, событие «выпало чётное число очков» состоит из трёх элементарных событий: может выпасть 2, 4 или 6 очков. Математики говорят, что элементарные события, при которых наступает событие A, благоприятствуют событию A. Их называют благоприятствующими событию A или благоприятными для события A.

Классическое определение вероятности

> Пусть случайный эксперимент может завершиться одним из n равновозможных исходов и пусть ровно m из них благоприятствуют событию A. Тогда вероятностью случайного события А называют дробь $\frac{m}{n}$, где n — число всех возможных исходов данного эксперимента, а m – число исходов, благоприятствующих событию A.
> $$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Пример 2. Какова вероятность того, что при бросании правильного игрального кубика выпадет чётное число очков?

Мы уже знаем, что при бросании кубика для события A «выпало чётное число очков» $n = 6$, а $m = 3$. Значит, $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Пример 3. В лотерее 10 выигрышных билетов и 240 билетов без выигрыша. Какова вероятность выиграть в эту лотерею, купив один билет?

В лотерее разыгрывается всего $10 + 240 = 250$ билетов, любой из них можно купить с одинаковой вероятностью. То есть $n = 250$, $m = 10$, значит $P(A) = \frac{10}{250} = \frac{1}{25}$.

ВЕРОЯТНОСТЬ ПРОТИВОПОЛОЖНОГО СОБЫТИЯ Пусть среди равновероятных исходов событию A благоприятны m исходов, тогда событию B, противоположному событию A, благоприятны $n - m$ исходов. Значит,

$$P(B) = \frac{n-m}{n} = 1 - \frac{m}{n} = 1 - P(A).$$

Впервые определение вероятности было дано в работах французского математика Пьера Симона Лапласа (1749–1827). Это определение называют классическим.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Как изменится ответ на вопрос задачи, если:
  а) Андрей не выучил 2 билета (пример 1);
  б) в лотерее 20 выигрышных билетов и 230 билетов без выигрыша (пример 3)?
- Бросают правильный игральный кубик. Какие из событий а), б), в), г) элементарные? Назовите исходы, благоприятные для события, и определите вероятность события:
  а) выпадет 3 очка;
  б) выпадет не менее 5 очков;
  в) выпадет простое число очков;
  г) выпадет меньше 7 очков.
- Для каждого события A из примеров 2 и 3 назовите противоположное ему событие B. Найдите $P(B)$.

УПРАЖНЕНИЯ

РАВНОВОЗМОЖНЫЕ ИСХОДЫ

676 Являются ли данные исходы равновозможными?
A: попасть при выстреле по мишени; *B*: промахнуться при выстреле по мишени.
A: посаженный цветок приживётся; *B*: посаженный цветок погибнет.
A: футбольная команда выиграет; *B*: футбольная команда проиграет; *C*: футбольная команда сыграет вничью.
A: президентом США станет республиканец; *B*: президентом США станет демократ.
A: очередной родившийся на планете ребёнок — мальчик; *B*: очередной родившийся на планете ребёнок — девочка.

677 Какова вероятность каждого исхода?
а) В колоде 36 карт. Наугад вынимают одну карту.
б) В лототроне 49 шаров. Лототрон выдаёт один шар.

Неверно! Петя считает, что вероятность того, что, выйдя на улицу, он встретит динозавра, равна 0,5. Он рассуждает так: «У события два исхода — либо я встречу динозавра, либо не встречу. Значит, вероятность каждого исхода равна 0,5». Опровергните его вывод. В чём ошибка Пети?

ВЫЧИСЛЯЕМ ВЕРОЯТНОСТЬ РАВНОВОЗМОЖНЫХ СОБЫТИЙ

678 Для каждого эксперимента найдите число всех возможных исходов, число благоприятных исходов и вычислите вероятность.
1) На блюде лежат одинаковые на вид пирожки: пять с капустой и семь с мясом. Какова вероятность того, что наугад взятый пирожок окажется с капустой?
2) В урне 15 белых и 25 чёрных шаров. Из урны наугад вынимают один шар. Какова вероятность того, что он будет белым?
3) Для лотереи отпечатаны 500 билетов, из них 25 с выигрышем. Какова вероятность вынуть билет без выигрыша?

679 В колоде 36 карт. Наугад вынимают одну карту. Определите вероятность следующих событий:
A: вынутая карта — дама пик; *C*: вынутая карта — красной масти;
B: вынутая карта — туз; *D*: вынутая карта — король чёрной масти.

680 В финал соревнований вышли 4 спортсмена из России, 3 из Белоруссии, 2 из Украины, 1 из Армении. Порядок выступления спортсменов определяется жребием. Найдите вероятность того, что первым будет выступать спортсмен: а) из России; б) не из России.

681 В группе российских туристов 2 человека владеют английским и французским языками, 1 человек — английским и немецким, 7 человек — только английским и 10 человек не владеют ни одним иностранным языком. Найдите вероятность того, что случайно выбранный из этой группы турист владеет: а) французским языком; б) двумя иностранными языками; в) английским языком.

682 Наугад выбрано двузначное число. Какова вероятность того, что оно окажется: а) кратным 5; б) простым?

683 На трёхместную скамейку произвольным образом садятся два мальчика и девочка. Какова вероятность того, что мальчики окажутся рядом?
Указание. Обозначьте девочку буквой *Д*, а мальчиков — M_1 и M_2. Выпишите все возможные варианты их размещения на скамейке.

684 В задачах а) и б) число всех возможных исходов равно числу перестановок из заданных элементов; для их подсчёта можно воспользоваться формулой $P_n = n!$, где $n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.
а) Маленькая девочка, не умеющая читать, но знающая буквы, складывает слово из кубиков с буквами «О», «К» и «Т». Какова вероятность того, что у неё получится слово КОТ?
б) Чтобы открыть сейф, нужно в некотором порядке набрать четыре цифры: 3, 5, 7, 9. Хозяин сейфа помнит цифры, но забыл их последовательность. Последовательность цифр он набирает случайным образом, не повторяя ни одну из комбинаций дважды. Какова вероятность того, что сейф будет открыт с первой попытки? требуемая комбинация будет набрана последней из всех возможных?

685 Грани кубика окрашены в красный или жёлтый цвет. Вероятность выпадения красной грани равна $\frac{1}{6}$, вероятность выпадения жёлтой грани равна $\frac{5}{6}$. Сколько красных и сколько жёлтых граней у этого кубика?

686 Слово написали на полоске картона и разрезали полоску на буквы. Найдите вероятность того, что если эти кусочки картона перемешать и снова сложить их в ряд случайным образом, то опять получится то же слово, если это слово: а) «алгебра»; б) «перестановка».

687 Наугад выбрано натуральное число от 1 до 1000000. Какова вероятность того, что оно окажется квадратом натурального числа?

688 Даны отрезки длиной 2, 5, 6 и 10 см. Какова вероятность того, что из выбранных наугад трёх отрезков можно составить треугольник?
Указание. Воспользуйтесь неравенством треугольника.

ВЕРОЯТНОСТЬ ПРОТИВОПОЛОЖНЫХ СОБЫТИЙ

689 В урне три шара: красный, зелёный и жёлтый. Шары не глядя вынимают один за другим. Для каждого события назовите событие, ему противоположное, и вычислите его вероятность.
A: шары будут вынуты в последовательности: жёлтый, красный, зелёный;
B: первым будет вынут жёлтый шар;
C: вначале будут вынуты красный и жёлтый шары (в любом порядке);
D: последним будет вынут зелёный шар.

690 Для каждого события сначала назовите событие, ему противоположное, а затем вычислите вероятность названного события:
а) событие из № 682, б; б) событие из № 684, б.

6.4 СЛОЖНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Как применять комбинаторные приёмы для вычисления вероятностей в экспериментах с равновозможными исходами.

Жан Лерон Даламбер
1717–1783
Французский философ, математик и механик

Даламбер вместе с Дидро работал над созданием знаменитой 17-томной «Энциклопедии наук, искусств и ремёсел», для которой написал статьи, относящиеся к математике и физике. «Энциклопедия...» сыграла большую роль в распространении идей Просвещения.
Даламбер говорил: «Работайте, работайте, а понимание придёт потом».

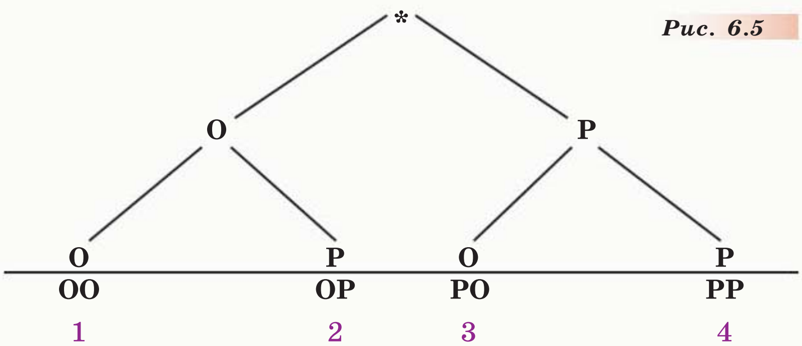
Вы, верно, уже заметили, что в задачах на вычисление вероятности в классической модели очень полезным оказывается знание комбинаторики. В этом пункте мы рассмотрим несколько примеров использования комбинаторных приёмов в ситуациях, когда случайный эксперимент состоит из нескольких испытаний, производимых одновременно или последовательно.

ЗАДАЧА О ДВУХ МОНЕТАХ Эту задачу называют ещё задачей Даламбера, по имени великого французского математика.

Пример 1. Монету бросают два раза. Какова вероятность того, что хотя бы один раз выпадет орёл?

Изобразим дерево возможных исходов (*рис. 6.5*). Эксперимент имеет 4 равновозможных исхода: в первых трёх из них происходит интересующее нас случайное событие. Поэтому вероятность того, что при двух бросаниях монеты хотя бы один раз выпадет орёл, равна $\frac{3}{4}$.

Рис. 6.5



Вы, наверное, удивитесь, но сам Даламбер решил задачу неверно! Он решил, что вероятность того, что при двух бросаниях монеты хотя бы один раз выпадет орёл, равна $\frac{2}{3}$. А всё потому, что рассматривал такие исходы: «выпадут два орла», «выпадут две решки» и «выпадут один орел и одна решка». Но оказалось, что надо учитывать не только сочетания результатов бросков, но и их порядок. Как видите, и великие могут ошибаться!

ЗАДАЧА О ДВУХ КУБИКАХ

Пример 2. Одновременно бросают два кубика — чёрный и белый. Какова вероятность того, что на чёрном выпадет больше очков, чем на белом?

Сначала подсчитаем общее число исходов эксперимента. Для этого мы их просто все выпишем, составив соответствующую таблицу:

Чёрный кубик

Белый кубик

	1	2	3	4	5	6
1	11	21	31	41	51	61
2	12	22	32	42	52	62
3	13	23	33	43	53	63
4	14	24	34	44	54	64
5	15	25	35	45	55	65
6	16	26	36	46	56	66

Каждый исход обозначен двузначным числом, первая цифра которого показывает, сколько очков выпало на чёрном кубике, а вторая — сколько очков выпало на белом кубике. Всего исходов $6 \cdot 6 = 36$, и в 15 из них, как видно из таблицы, происходит интересующее нас событие. Значит, вероятность события «на чёрном кубике выпадет больше очков, чем на белом» равна $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

ЗАДАЧА О ТРЁХ КУБИКАХ

Пример 3. Одновременно бросают три кубика. Какова вероятность следующих событий:

A: на всех кубиках выпало одинаковое число очков;

B: на всех кубиках число очков различно?

Вычислим сначала общее число исходов этого эксперимента. Бросок каждого кубика может привести к шести различным исходам — может выпасть от 1 до 6 очков. Поэтому по правилу умножения общее число исходов равно $6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3$. (Все исходы мы считаем равновозможными.)

Теперь найдём число исходов, благоприятных событию A. На всех кубиках одновременно может выпасть 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков, значит, благоприятных исходов всего 6.

Поэтому $P(A) = \frac{6}{6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{1}{36}$.

Теперь найдем число исходов, благоприятных событию B. На одном кубике может выпасть любое число очков от 1 до 6, т. е. для первого кубика возможны 6 исходов. Так как на всех кубиках число очков должно быть разным, то для второго кубика остаётся только 5 исходов, а для третьего — только 4 исхода. Тогда число всех исходов, благоприятных событию B, равно $6 \cdot 5 \cdot 4$.

Следовательно, $P(B) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{5}{9}$.

В эпоху Крестовых походов получила распространение игра в кости — 2 или 3 кубика с нанесёнными на них очками выбрасывали на стол, и ставку брал тот, кто выбросил бо́льшую сумму очков. Игроки заметили, что некоторые суммы выпадают часто, а другие — редко. Пытаясь разобраться, они составляли таблицы, показывающие, сколькими способами можно получить каждую из сумм. На первых порах они считали только число различных сочетаний очков, дававших данную сумму, т. е. делали ту же ошибку, что и Даламбер.

Художник М. Черквоцци (1602–1660). Солдаты, играющие в кости

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Сформулируйте событие, противоположное событию из задачи Даламбера, и вычислите его вероятность.
- Для эксперимента из примера 2 сформулируйте своё случайное событие и найдите его вероятность.
- Проверьте истинность утверждения «В каждом эксперименте сумма вероятностей всех элементарных событий равна 1» для всех экспериментов из пунктов 6.3, и 6.4.

УПРАЖНЕНИЯ

ЗАДАЧИ О МОНЕТАХ

691 Какова вероятность того, что при двух бросаниях монеты:
а) хотя бы один раз выпадет решка;
б) ни разу не выпадет решка;
в) монета дважды упадёт на одну и ту же сторону;
г) монета упадёт на разные стороны?

692 Монету подбрасывают 5 раз. Какова вероятность того, что:
а) все пять раз выпадет орёл; б) ни разу не выпадет орёл?

693 Три раза подряд подбросили монету. Какова вероятность событий:
A: хотя бы один раз выпал орёл;
B: хотя бы один раз выпала решка;
C: все три исхода одинаковы;
D: не все исходы одинаковы;
E: все три исхода разные?

Художник А.Я. Васильев. Орлянка. 1850-е гг. Рыбинский государственный историко-архитектурный и художественный музей-заповедник

ЗАДАЧИ О КУБИКАХ

694 Используя таблицу из примера 2, выясните, какова вероятность событий:
A: на кубиках выпадет одинаковое число очков;
B: на белом кубике выпадет больше очков, чем на чёрном;
C: на белом кубике выпадет не меньше очков, чем на чёрном.

Для выполнения заданий № 695–697 можно составить таблицу, аналогичную таблице из примера 2, но в клетки записывать сумму выпавших очков.

695 Игральный кубик бросают два раза. Какова вероятность того, что в сумме выпадет 2 очка; 3 очка; 4 очка; 10 очков; 11 очков; 12 очков?

Неверно!

Задача. Игральный кубик бросают два раза. Какова вероятность, что сумма выпавших очков будет равна 4?
Решение Кати: Сумма может принимать такие значения: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Всего исходов 11. Вероятность выпадения любой суммы равна $\frac{1}{11}$. *Ответ*: $\frac{1}{11}$.
Решение Димы: Сумма 4 получится, если выпадут такие комбинации: 3 и 1, 2 и 2, 1 и 3. Поскольку от перестановки слагаемых сумма не меняется, то имеем два исхода: «выпало по 2 очка» и «выпало 3 очка и 1 очко». Всего исходов $6 \cdot 6 = 36$, благоприятных — 2. Вероятность равна $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$. *Ответ*: $\frac{1}{18}$.
Оба решения неверны. Объясните, в чём ошибка каждого из ребят.

696 Брат и сестра бросают игральные кубики: брат — чёрный, сестра — белый. Они договорились, что если сумма очков на кубиках окажется равной шести, то выигрывает брат, а если сумма очков будет равна семи, то выигрывает сестра. Справедлива ли игра или у одной из сторон шансов на выигрыш больше? Назовите несколько вариантов, при которых шансы сторон будут равными.

697 Одновременно бросают два кубика. Какое значение суммы выпавших очков наиболее вероятно? Чему равна эта вероятность?

698 Одновременно бросают три кубика. Вычислите вероятности событий:
C: хотя бы на двух кубиках выпавшее число очков различно;
D: хотя бы на двух кубиках выпавшее число очков совпало.

ДРУГИЕ СИТУАЦИИ

699 Чемодан открывается кодом 710. Цифра каждого из трёх разрядов при наборе кода может быть любой от 0 до 9. Человек Рассеянный забыл код своего чемодана и перебирает разные коды, не повторяя ни один из них дважды. Сколько попыток в худшем случае ему придётся сделать, чтобы открыть свой чемодан? Какова вероятность того, что, набрав произвольно комбинацию из трёх цифр, он сможет открыть чемодан с первой попытки?

700 В урне лежат пять шаров: красный, жёлтый, синий, зелёный и белый. Их не глядя вынимают один за другим. Какова вероятность того, что:
а) первым будет вынут белый шар, а последним — зелёный;
б) сначала будут вынуты жёлтый и зелёный шары (в любом порядке);
в) красный и синий шары будут вынуты друг за другом (в любом порядке)?

701 Сейфовый замок открывается при наборе определённой комбинации из пяти цифр, каждая из которых может быть любой от 0 до 9. С какой вероятностью взломщик откроет сейф в течение часа, если будет тратить на набор каждой новой комбинации около секунды?

702 В коробке 3 белые шашки и 5 чёрных. Одновременно наугад вынимают две шашки. Какова вероятность того, что будут вынуты две белые шашки?

703 В финальной части чемпионата по фигурному катанию выступают 5 пар, в том числе две пары из России. Порядок выступления пар определяется жеребьёвкой. Какова вероятность того, что россиянам достанутся первый и второй стартовые номера?

704 В эстафетной лыжной гонке участвуют команды в составе из двух девушек и двух юношей; первые два этапа бегут девушки, последние два этапа — юноши. В команде города N 3 девушки и 5 юношей. Среди них — брат и сестра Коля и Оля Светловы. Состав команды на эстафетную гонку решено определить жеребьёвкой.
а) Сколько существует вариантов эстафетной команды? (*Подсказка.* Здесь важно, кто на каком этапе побежит.)
б) Какова вероятность того, что Оля Светлова побежит в эстафете? Какова вероятность того, что в эстафете побежит Коля Светлов?
в) Какова вероятность того, что и Оля, и Коля попадут в эстафетную команду?

6.5 ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ

ВЫ УЗНАЕТЕ:

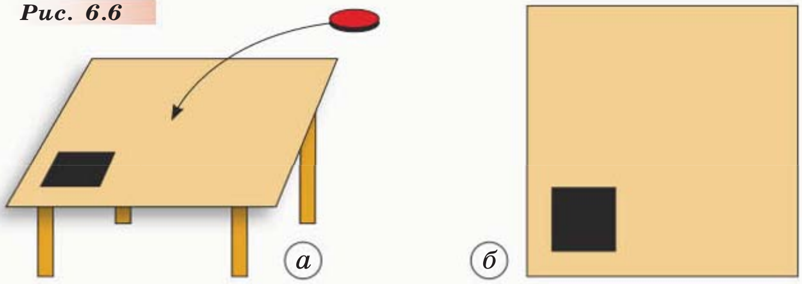
- Как можно определить вероятность, воспользовавшись геометрическими соображениями.

Понятно, что попасть мячом с одного и того же расстояния в большие ворота вероятнее, чем в маленькие. Точно так же при стрельбе при одних и тех же условиях попасть в большую мишень вероятнее, чем в маленькую. А можно ли измерить эти вероятности?

В задачах, где существенную роль играют размеры объектов, можно по-другому подойти к определению вероятности случайного события — из геометрических соображений.

Пример. На квадратном столе выделен чёрный квадрат (*рис. 6.6, а*). Какова вероятность того, что фишка попадёт в центр чёрного квадрата, если её бросить на стол наугад (например, с закрытыми глазами)?

Рис. 6.6



Очевидно, что эта вероятность равна отношению площади чёрного квадрата к площади поверхности стола (*рис. 6.6, б*). Если, например, площадь стола равна 0,6 м^2, а площадь чёрного квадрата — 0,04 м^2, то $P = \frac{0{,}04}{0{,}6} = \frac{1}{15}$.

Здесь мы пренебрегли размерами самой фишки, иначе она могла бы попасть одновременно и на квадрат, и на часть стола вне квадрата.

В задачах на геометрическую вероятность обычно считается, что размеры предмета (фишки, пули, мяча и т. п.) ничтожно малы по сравнению с размерами места, куда он должен попасть (стол, мишень, ворота и т. п.).

Также принято считать, что брошенная фишка с одинаковой вероятностью попадает в любое место стола, пуля с одинаковой вероятностью попадает в любое место мишени, а мяч — в любое место ворот.

Исходя из этого, можно понять, почему искомая вероятность равна отношению соответствующих площадей. Ведь, например, в рассмотренной задаче чёрный квадрат представлял благоприятные исходы, а стол — все возможные исходы.

Первым стал заниматься задачами на геометрическую вероятность французский учёный Жорж Луи Леклерк, граф де Бюффон (1707–1788). Он рассматривал вероятность того, что круглый диск, брошенный на прямоугольную полосу, разбитую на квадраты, целиком попадёт внутрь одного из квадратов. Затем заменял диск на квадратную пластинку или иглу. Соответствующие задачи теории вероятностей называются задачами Бюффона. Ему приписывают выражение: «Гений — это терпение».

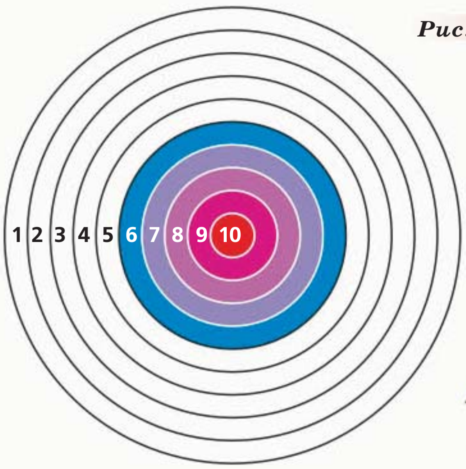
ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Приведите свои примеры ситуаций, где вероятность зависит от геометрических величин.
- Какие допущения принято делать, когда речь идёт о геометрической вероятности?

УПРАЖНЕНИЯ

705 а) Стрелок не целясь стреляет в круглую мишень (***рис. 6.7***) и попадает в неё. (Ширина всех колец мишени одинакова и равна радиусу центрального круга). Какова вероятность того, что стрелок попал в цветную часть круга? выбил не более 5 очков?
б) Стрелок не целясь стреляет в треугольную мишень (***рис. 6.8***) и попадает в неё. Какова вероятность того, что он попал в тройку? в двойку? в единицу?

Рис. 6.7



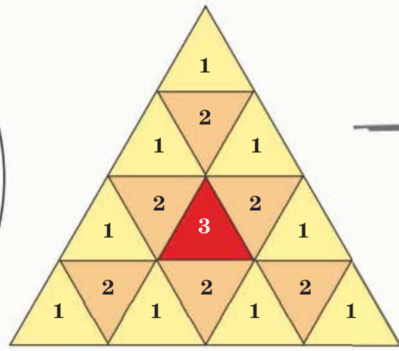
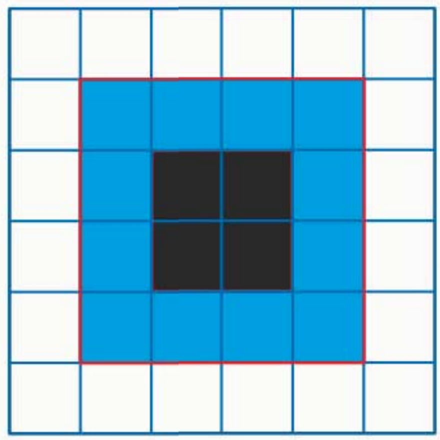


Рис. 6.8

706 Фишку наугад бросают в квадрат (***рис. 6.9***). Какова вероятность того, что фишка попала:
а) в чёрный квадрат;
б) в квадрат, имеющий красный контур;
в) в цветную рамку?

Рис. 6.9



707 Фишку наугад бросают в квадрат со стороной 1, и она попадает в некоторую точку M. Какова вероятность того, что:

а) расстояние от точки M до ближайшей стороны квадрата не превосходит 0,25;

б) расстояние от точки M до ближайшей диагонали квадрата не превосходит 0,25?

Указание. Отметьте на квадрате ту часть, попадание в которую является благоприятным исходом, и найдите её площадь.

708 Монету бросают на шахматную доску. Какова вероятность того, что она попадёт на белую клетку? на чёрную клетку? (Размерами монеты можно пренебречь.)

709 Фигура Φ задана на координатной плоскости условиями: $|x| \le 5$ и $|y| \le 5$. Известно, что центр квадрата со сторонами, параллельными осям координат, принадлежит фигуре Φ. Сторона квадрата равна 2. Какова вероятность того, что квадрат целиком содержится в фигуре Ф?

Указание. Фигура Φ — это квадрат со стороной 10 и центром в начале координат. Квадрат не будет содержаться в фигуре Φ целиком, если расстояние от его центра до границ фигуры Φ меньше 1. Покажите штриховкой часть фигуры Φ, соответствующую благоприятным исходам.

УЗНАЙТЕ БОЛЬШЕ

СЛОЖЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Ученик, используя полученные знания в области теории вероятностей, решил сделать прогноз своей успеваемости по математике, изучив свои отметки за 5–7 классы. Результаты его исследования представлены в таблице.

Отметка	Количество отметок	Примерная вероятность получения отметки
«5» (отлично)	39	0,21
«4» (хорошо)	78	0,41
«3» (удовлетворительно)	63	0,34
«2» (неудовлетворительно)	8	0,04

Какова вероятность того, что очередной ответ ученика будет оценён на «4» или «5»? Если считать, что все эти годы он учился примерно одинаково, и не учитывать особые обстоятельства, такие, как сложность темы, состояние здоровья и т. д., то на этот вопрос ответить нетрудно.
Всего ученик получил 188 отметок, из них ответов на «4» и «5» было 39 + 78, значит, вероятность можно оценить как

$$\frac{39+78}{188}=\frac{39}{188}+\frac{78}{188}\approx 0,21+0,41=0,62.$$

Мы видим, что для ученика вероятность получить «4» или «5» равна сумме вероятностей двух событий: получить «4» и получить «5». В приведённом рассуждении важно, что получение отметок «4» и «5» одним и тем же учеником за один и тот же ответ — *несовместимые события*, т. е. *такие события, которые в рассматриваемом эксперименте не могут произойти одновременно.*

! Вероятность получить хотя бы один (неважно, какой именно) из нескольких интересующих нас результатов эксперимента равна сумме вероятностей этих результатов, если эти результаты несовместимы между собой.

Это правило называют **правилом сложения вероятностей.**
Если случайные события совместимы, т. е. могут произойти одновременно, правило сложения вероятностей применить нельзя.

1 Совместимы ли события A и B или нет?
а) A: к остановке подошёл автобус № 3;
   B: к остановке подошёл автобус № 5.
б) A: студент идёт в пальто;
   B: студент идёт в университет.
в) A: в футбольном матче Россия—Бразилия победит Россия;
   B: в том же футбольном матче Россия—Бразилия победит Бразилия.

2 В лотерее выпущено 100000 билетов и установлены: 1 выигрыш в 100000 р., 10 выигрышей по 10000 р., 100 выигрышей по 1000 р., 1000 выигрышей по 100 р. и 5000 выигрышей по 50 р. Человек купил один лотерейный билет.
а) Какова вероятность того, что он выиграет не меньше 1000 р.?
б) Какова вероятность того, что он выиграет?
в) Какова вероятность того, что он не выиграет?

ПОДВЕДЁМ ИТОГИ

Медиана — это число, которое разделяет упорядоченный ряд данных на две части, одинаковые по количеству членов.	Дан ряд чисел: 1, 2, 3, 4, 5. Его медиана — число 3.
Чтобы найти медиану произвольного ряда чисел, их прежде всего надо упорядочить. • Медианой упорядоченного ряда, состоящего из нечётного числа членов, является число, которое находится посередине.	Найдём медиану ряда: 12, 8, 7, 14, 25, 6, 19. Упорядочим его: 6, 7, 8, 12, 14, 19, 25. Число членов ряда нечётно. Медиана равна 12.
• Медианой упорядоченного ряда, состоящего из чётного числа членов, является среднее арифметическое двух чисел, находящихся посередине.	Найдём медиану ряда: 12, 8, 7, 14, 25, 6, 19, 18. Упорядочим его: 6, 7, 8, 12, 14, 18, 19, 25. Число членов ряда чётно. Медиана равна $(12 + 14) : 2 = 13$.

1 Найдите медиану ряда: 12; 17; 13; 9; 19; 15; 20; 9.

2 На заводе, выпустившем партию телевизоров новой марки, изучили, по каким ценам продают телевизоры этой серии в магазинах города. Получился следующий ряд данных: 9320 р., 9330 р., 8290 р., 9300 р., 9350 р., 8280 р., 9300 р., 9320 р., 9400 р., 9290 р.
Определите все средние и размах цен на телевизоры этой серии в магазинах города.

3 В таблице представлены данные о результативности трёх ведущих игроков баскетбольной команды в прошедшем чемпионате.

Фамилия игрока	Сыграно матчей	Броски/попадания		
		2-очковые	3-очковые	Штрафные (1 очко)
Иванов	7	70/42	0/0	37/27
Зарипов	5	23/13	10/6	31/25
Палей	7	44/21	14/7	19/17

Для каждого игрока вычислите следующие показатели:
а) частоту попадания в кольцо;
б) среднее число бросков в одном матче;
в) среднее число очков, набранных в одном матче.

4 Для работы в модельном агентстве отбирают девушек с ростом не менее 170 см. Есть 4 группы кандидаток. В какой из групп заведомо половина кандидаток подходит по росту? Про группы известно следующее:
1) в первой группе средний рост равен 173 см;
2) во второй группе максимальный рост равен 182 см;
3) в третьей группе минимальный рост равен 161 см;
4) в четвёртой группе медиана ряда роста равна 172 см.

Вероятность достоверного события равна 1, вероятность невозможного события равна 0.

A: солнце взойдёт на востоке;
B: солнце взойдёт на западе.
$P(A) = 1$, $P(B) = 0$.

Для экспериментов с равновероятными исходами вероятностью случайного события называют отношение числа m исходов, благоприятных для этого события, к числу n всех возможных исходов эксперимента:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Для экзамена приготовили 20 билетов. Иван не выучил 2 билета. Какова вероятность того, что ему достанется невыученный билет?
Всего исходов — 20;
благоприятных — 2.

$$P(A) = \frac{2}{20} = 0{,}1.$$

5 Приведите пример события, вероятность которого равна 0, и пример события, вероятность которого равна 1.

6 В сервис-центре подсчитали, что на каждую тысячу проданных телефонов приходится 6 неисправных. Какова вероятность того, что купленный телефон будет исправен?

7 Для каждого баскетболиста из задания № 3 определите вероятность того, что штрафной бросок будет выполнен им успешно.

8 В классе учатся 12 девочек и 18 мальчиков. По жребию выбирается один дежурный. Какова вероятность того, что дежурным окажется мальчик?

9 Какова вероятность того, что при бросании правильного игрального кубика выпадет не менее трёх очков?

10 В колоде 36 карт. Наугад вынимают одну карту. Расположите на вероятностной шкале события:
A: вынут король пик;
B: вынута карта бубновой масти;
C: вынута шестёрка;
D: вынутая карта — дама или валет.

11 Два брата и их друг садятся в автобус. Найдите вероятность того, что первым из них в автобус войдёт один из братьев.

12 На круговой диаграмме показано распределение (в процентах) студентов университета по факультетам. Для участия в телевикторине случайным образом выбирают одного студента. Какова вероятность того, что выбранный студент учится на математическом или экономическом факультете?

13 В коробке 3 белых, 5 красных и 12 чёрных одинаковых пуговиц. Какова вероятность того, что наугад вынутая пуговица будет не красного цвета?

14 Перебрав цветки подаренной ей ветки сирени, девушка обнаружила 3 пятилепестковых цветка. Сколько примерно цветков на этой ветке, если известно, что вероятность того, что в выбранном наугад цветке сирени пять лепестков, равна 0,01?

ОТВЕТЫ

Глава 1

6. а) $-0{,}75$; б) $1\frac{2}{3}$; в) $2\frac{1}{12}$; г) $-0{,}11$. **12.** а) 200 м/мин^2; б) 15 мин. **13.** а) $\left(\frac{l}{t} - u\right)$ м/мин; 40 м/мин $=$ 2,4 км/ч; б) $\frac{s}{v-u}$ ч; 3 ч 20 мин; 45 мин. **15.** $c = \frac{S-2ab}{2(a+b)}$; $a = \frac{S-2bc}{2(b+c)}$; $b = \frac{S-2ac}{2(a+c)}$. **26.** а) $a+b$; б) $\frac{3x}{x-2}$; в) $\frac{m-n}{2}$; г) $c+1$; д) $\frac{1}{a-y}$. **27.** а) $\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$; б) $\frac{a+b}{a^2-ab+b^2}$; в) $\frac{1}{a^2-b^2}$; г) $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$. **28.** а) $\frac{a}{a-b}$; б) $\frac{a}{a+1}$; в) $\frac{m-p}{m}$; г) $\frac{b+c}{x+y}$; д) $\frac{1}{a+b-c}$; е) $\frac{x+y-c}{x-y-c}$. **29.** а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{3}{4}$. **34.** а) $-c$; б) $-\frac{a}{b}$; в) $\frac{x}{y}$; г) $\frac{a}{a-c}$. **35.** а) $-\frac{5a}{b}$; б) $-\frac{a}{5}$; в) $\frac{x+y}{x-y}$; г) $-\frac{a}{a+1}$; д) $\frac{a}{a-2}$; е) $\frac{y-x}{y}$; ж) $-b-1$; з) $-a-n$. **36.** а) $\frac{a+b}{b-a}$; б) -1; в) $\frac{a-b}{c-a}$ или $\frac{b-a}{a-c}$. **41.** а) $\frac{y-1}{xy}$; б) $\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}$; в) $\frac{b+a+1}{ab}$; г) $\frac{1+2x+x^2}{x^3}$; д) $\frac{2}{y}$; е) $\frac{1}{6a}$. **42.** а) $\frac{3y}{2(y+1)}$; б) $\frac{ad+bc}{bd(a+c)}$; в) $\frac{5}{x-5}$; г) $\frac{a}{(a-1)^2}$; д) $\frac{2xy}{x^2-y^2}$; е) $\frac{2ab}{a^2-b^2}$. **44.** а) -4; б) 20; в) 0,92; г) $-\frac{1}{17}$. **45.** а) $\frac{2a}{a^2-x^2}$; б) $\frac{4}{x^2-y^2}$; в) $\frac{x-y}{y(x+y)}$. **46.** а) $\frac{2}{1-x^2}$; б) $\frac{4b}{b^2-a^2}$; в) $\frac{1}{y}$. **47.** а) $\frac{2x+6}{x^2-1}$; б) $\frac{x^2+1}{x(x-1)^2}$; в) $\frac{xy}{x^3+y^3}$. **48.** а) 2; б) $\frac{b}{a-b}$; в) $x+3$; г) $\frac{1}{a-2}$; д) $\frac{x}{x-y}$; е) 2. **49.** а) $\frac{2}{p(p+5)}$; б) $\frac{3a}{(3-a)^2}$; в) 1; г) $\frac{1}{a-b}$; д) $\frac{5x}{4-x^2}$; е) $\frac{2}{(1-a)^2}$. **52.** а) $\frac{5x}{x-y}$; б) $\frac{7y}{x+y}$; в) $\frac{16c}{c-8}$; г) $\frac{mn+1}{n}$; д) $\frac{2x^2+2}{3x}$; е) $\frac{a}{2a+1}$; ж) $\frac{10a}{3a-2}$; з) $\frac{ab-1}{ab}$. **53.** а) $\frac{2x(y-1)}{y}$; б) $\frac{5a^2}{2a+b}$; в) $\frac{8}{x-2}$; г) $\frac{b^2+36}{b+6}$. **59.** а) $-a-c$; б) $-\frac{n+m}{3m}$; в) $\frac{y-x}{x+y}$; г) $\frac{5-a}{25}$; д) $-\frac{a+b}{ab}$; е) $\frac{y-x}{5}$. **62.** а) $2a-4$; б) $\frac{n+2}{3(n-2)}$; в) $x+z$; г) $\frac{b^2}{a}$. **63.** а) $\frac{(x+3)(x+5)}{x^2}$; б) $\frac{d(b-a)}{a^2}$; в) $\frac{d-c}{(c+d)^2}$; г) $\frac{b-a}{3(a+b)}$; д) $\frac{xy-x^2-y^2}{xy+x^2+y^2}$; е) $\frac{p^2+pq+q^2}{p^2-q^2}$. **65.** а) $\frac{a+b}{ab}$; б) $\frac{2y}{x+y}$; в) $\frac{x-2}{x}$; г) $\frac{m^2}{m-n}$; д) $\frac{1}{c}$; е) cd^2-c^2d. **66.** а) x^2y-xy^2; б) a^2b^2; в) $\frac{x-y}{xy}$. **67.** а) $\frac{n}{1-n}$; б) 1; в) $\frac{xy}{x+y}$; г) $\frac{b(b+3)}{b-1}$. **71.** а) $\frac{1-a}{a}$; б) $\frac{5-a}{a}$; в) $\frac{2x}{4-x^2}$; г) $\frac{y}{y^2-x^2}$. **72.** а) $\frac{mn}{n-m}$; б) $\frac{x(x+y)}{y}$; в) $b-3$; г) $-\frac{1}{n+1}$. **73.** а) $\frac{a-1}{(a+b)^2}$; б) $2xy$. **95.** а) 10,2 млн шт.; б) 13980 тыс. км^2. **96.** От Солнца: $\approx$ 8 мин; от альфа Центавра: $3{,}8\cdot10^4$ ч $\approx$ 4,3 года. **97.** 2017 г.: 7,5 млрд чел.; 2005 г.: 6,5 млрд чел. **103.** а) 0,04; б) $\frac{1}{12}$; в) $\frac{1}{36}$; г) 64; д) 0,01; е) $\frac{1}{27}$; ж) $\frac{1}{49}$; з) 32. **104.** а) 0,2; б) 0,01; в) $\frac{1}{8}$; г) $\frac{1}{27}$; д) 9; е) 36; ж) 1000; з) $\frac{1}{25}$. **105.** а) 10000; б) 25; в) $\frac{2}{3}$; г) $\frac{1}{16}$. **106.** а) $2^{2(m+n)}$; $2^{3(m-n)}$; 2^{-2mn}; б) 2^{2n}; 2^{24n}; 2^{6n}. **108.** а) 9; б) 5; в) 9; г) 40,5. **109.** $2a$; $4a$; $2a^2$; $\frac{a}{2}$. **110.** а) $\frac{5}{3}$; б) $\frac{4}{49}$; в) $\frac{3}{2}$; г) $\frac{5}{2}$. **111.** а) a^{-4}; б) c^6; в) $\frac{1}{2}$; г) $100+10^n$. **112.** а) $\frac{y-x}{xy}$; б) $\frac{1}{mn}$; в) $\frac{b-a}{a^3b^2+a^2b^3}$; г) $\frac{x+y}{xy}$. **117.** в) -12; г) 5. **118.** а) 33; б) -20; в) $-0{,}4$; г) 8. **119.** а) -3; б) 1,5; в) 3; г) -2.

120. а) -1; б) 5,4; в) 3; г) 5. **121.** а) 3; б) 0,625; в) $-1,6$. **122.** а) 4; б) $-1,5$. **123.** 1,5 км. **124.** 1 км 200 м. **125.** В 196 км от A. **126.** На 3,75 км. **127.** 9 км. **128.** 14 км. **129.** 1200 р. **130.** 3300 р. **131.** а) 32 г; б) 50 г. **132.** 42 г. **133.** 64 г.

Узнайте больше

1. а) $3n + 2 + \frac{5}{n-4}$; б) $n^2 - n + 1 + \frac{3}{n+2}$; в) $x^2 - x - 2 + \frac{6}{2x^2 - x + 1}$; г) $3x^2 + x - 2 - \frac{2}{x^2 - x - 2}$. **2.** а) При $n = -15; -10; -7; -6; -4; -3; 0; 5$; б) при $n = -8; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 7$; в) при $n = 0$ и $n = -1$; г) при $n = -3; 0; 1; 4$; д) при $n = -8; -3; 0; 1; 3; 4; 7; 12$.

Глава 2

153. 3) а) 5 см; б) 1,5 дм; в) 0,4 м. **154.** 3) а) 5 см; б) 0,4 м. **163.** $a = \sqrt{20} \approx$ $\approx 4,5$ см. **164.** $r \approx 1,8$ см. **165.** Примерно 4 с. **167.** 1) 1,6; 1,62; 1,618. **168.** $d \approx 13$ м. **177.** а) $8 < \sqrt{74,25} < 9$; к числу 9; б) $4 < \sqrt{20,42} < 5$; к числу 5. **178.** а) 4; б) 7 и 8; в) 3; 4; 5; 6; 7; 8. **180.** 30 см и 40 см. **181.** Примерно на 838 м. **182.** На высоте 5,6 м. **184.** 1) а) $\sqrt{50}$ см $\approx 7,1$ см; б) $\sqrt{60}$ см $\approx 7,7$ см; 2) $d = \sqrt{2S}$. **187.** 100 см. **188.** Нельзя. **189.** 7,1 км. **190.** 99 луковиц. **192.** 3) Используйте равенства: $\sqrt{10} = \sqrt{9+1}$; $\sqrt{13} = \sqrt{9+4}$; $\sqrt{17} = \sqrt{16+1}$. **203.** а) 9; б) -9; в) -2; г) 10; д) -30; е) 1. **204.** а) $\sqrt{8}$; б) $2\sqrt{3}$; в) 5; г) 18. **205.** а) $\frac{1}{18}$; б) -18. **206.** а) $12a^3$; б) $150b^3$; в) $16x^2$; г) c^3. **219.** 1) A, C, F; 2) B, K; 3) D, E, L. **220.** Пересекает отрезки AB и BC. **226.** а) $0,6^2 < 0,6 < \sqrt{0,6}$; б) $\sqrt{12,5} < 12,5 < 12,5^2$. **234.** а) $\frac{3}{20}$; б) $\frac{16}{21}$; в) $1\frac{1}{6}$; г) $5\frac{17}{20}$; е) 0,1. **235.** а) 3,6; б) 0,176; в) 9; г) 2,8; д) $\frac{3}{16}$; е) $1\frac{2}{5}$. **236.** а) 30; б) 30; в) 60; г) 60; д) 42; е) 32; ж) 20; з) 22. **240.** а) 9,1; б) 0,54; в) 0,06; г) 8,75. **241.** а) 180; б) 390; в) 660. **247.** а) 9; б) -4. **248.** а) 0,5; б) 10; в) 2; г) 2. **249.** а) 30; б) 27; в) 720; г) 2400. **253.** а) $\sqrt{2^6 \cdot 3^2 \cdot 7^2} = 168$; б) $\sqrt{3^4 \cdot 5^4} =$ $= 225$; в) $\sqrt{2^6 \cdot 3^4 \cdot 7^2} = 504$. **257.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $2\sqrt{10}$; в) $\frac{\sqrt{a}}{5}$; г) $\frac{\sqrt{2c}}{5}$; д) $\frac{3}{\sqrt{x}}$; е) $\frac{4}{\sqrt{2y}}$. **259.** а) $-\sqrt{150}$; б) $-\sqrt{700}$; в) $-\sqrt{0,5}$; г) $-\sqrt{180a}$; д) $-\sqrt{3c}$. **263.** а) $300\sqrt{2}$; б) $540\sqrt{3}$; в) $720\sqrt{3}$; г) $2400\sqrt{7}$. **264.** а) $6\sqrt{3}$; б) $200\sqrt{10}$; в) $45\sqrt{15}$; г) $0,27\sqrt{0,1}$; д) $500\sqrt{5}$. **265.** а) $\frac{1}{2\sqrt{2}} > \frac{1}{3} > \frac{1}{\sqrt{10}}$; б) $\frac{1}{4} > \frac{1}{\sqrt{17}} > \frac{1}{3\sqrt{2}}$; в) $3\sqrt{0,1} > 2\sqrt{0,2} > \sqrt{\frac{3}{5}}$. **269.** а) $2\sqrt{2}$; б) $\sqrt{5} - 4\sqrt{3}$; в) $4\sqrt{7} - 4\sqrt{6}$. **272.** а) $6 + 2\sqrt{5}$; б) $14 - 4\sqrt{10}$; в) $8 - 2\sqrt{15}$; г) $9 + 2\sqrt{14}$. **274.** а) $30 - 5\sqrt{5}$; б) $2\sqrt{66}$; в) -2. **277.** а) $3\sqrt{2} - 2$ см^2; б) $10 + \sqrt{2}$ см^2. **278.** б) $\frac{1}{4}$ и $-2\sqrt{3}$; в) $\frac{3}{2\sqrt{6}}$ и $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$; г) $\frac{3}{2\sqrt{5}}$ и $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **279.** 2) а) $a + \sqrt{3}$; б) $\frac{1}{\sqrt{6} - c}$; в) $\sqrt{x} - 1$; г) $\sqrt{a} - \sqrt{b}$; д) $\sqrt{2} + 1$; е) $\sqrt{5} + \sqrt{2}$. **280.** а) -6; б) -76; в) $69 - 12\sqrt{30}$; г) $-17 -$ $- 4\sqrt{6} - 10\sqrt{2}$. **281.** а) 1; б) 3; в) 38; г) $4\sqrt{5} - 4$. **287.** 2) а) $\sqrt{3} - 1$; б) $\sqrt{7} - 2$; в) $\sqrt{5} - 1$; г) $\sqrt{10} - 3$. **288.** а) $2a\sqrt{a}$; б) $3|c| \cdot \sqrt{3}$; в) $5x^2\sqrt{x}$; г) $2m^2\sqrt{6}$.

294. 1) а) $3 < \sqrt[3]{40} < 4$; б) $4 < \sqrt[3]{80} < 5$; в) $4 < \sqrt[3]{100} < 5$; г) $5 < \sqrt[3]{200} < 6$; д) $-5 < \sqrt[3]{-100} < -4$; е) $-6 < \sqrt[3]{-150} < -5$. **297.** а) 6; б) 36; в) 3. **298.** а) 50; б) 12; в) 14. **299.** а) 16; б) 12; в) 360. **300.** а) $9\sqrt[3]{10}$; б) $5\sqrt[3]{3}$; в) $3\sqrt[3]{2}$. **303.** 4 дм. **305.** 2) Увеличить в $\sqrt[3]{2}$ раз; $\sqrt[3]{2} \approx 1{,}26$.

Узнайте больше

1. а) $5 + \sqrt{2}$; б) $2 + \sqrt{5}$; в) $3 - \sqrt{7}$. **2.** а) $\sqrt{5} + \sqrt{2}$ и $\sqrt{5} - \sqrt{2}$; б) $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ и $\sqrt{5} - \sqrt{3}$. **3.** 2) а) $1 + \sqrt{11}$; б) $3\sqrt{5} + 2\sqrt{3}$. **4.** $\sqrt{57 - 12\sqrt{15}} = 3\sqrt{5} - 2\sqrt{3}$.

Глава 3

309. а) -4; б) 4. **310.** а) -2; б) -6. **311.** б) $x^2 + x - 5 = 0$; в) $2x^2 - 16 = 0$. **317.** а) -3 и -7; б) $2 - \sqrt{3}$ и $2 + \sqrt{3}$; в) -7; г) нет корней. **319.** б) -12 и -2; г) нет корней; е) $-0{,}5$. **320.** а) $-1\frac{1}{2}$ и 2; г) нет корней; е) $1\frac{1}{2}$. **326.** а) -1 и $-\frac{1}{2}$; б) -3 и $\frac{2}{3}$; в) $-\frac{1}{4}$ и 3; г) -2 и $-\frac{1}{3}$; д) -1 и $-1\frac{1}{2}$; е) $-\frac{1}{3}$ и $2\frac{1}{2}$. **328.** а) -1 и $-\frac{2}{7}$; б) нет корней; в) $-\frac{1}{2}$ и 5; г) $1\frac{1}{2}$; д) $-1\frac{1}{2}$ и 2; е) нет корней. **329.** д) 3 и $3\frac{1}{2}$; е) нет корней. **330.** а) $-0{,}5$; б) 0,7; в) -8 и -1; г) -6 и $\frac{2}{3}$. **331.** в) $-1\frac{2}{3}$ и -1; г) $-1\frac{1}{2}$ и 2. **332.** а) -6 и 11; д) $-2\frac{1}{3}$ и -2; е) $\frac{2}{3}$ и 5. **333.** г) $\frac{-1 - \sqrt{3}}{2}$ и $\frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$; е) $6 - 3\sqrt{2}$ и $6 + 3\sqrt{2}$. **334.** а) $3 - \sqrt{10} \approx -0{,}16$ и $3 + \sqrt{10} \approx 6{,}16$; б) $\frac{7 - \sqrt{85}}{6} \approx -0{,}37$ и $\frac{7 + \sqrt{85}}{6} \approx$ $\approx 2{,}70$; в) $-5 - \sqrt{23} \approx -9{,}80$ и $-5 + \sqrt{23} \approx -0{,}20$; г) $\frac{2}{3} \approx -0{,}67$ и 1; д) $\frac{-2 - \sqrt{2}}{2} \approx -1{,}71$ и $\frac{-2 + \sqrt{2}}{2} \approx -0{,}29$; е) $-2 - 2\sqrt{2} \approx -4{,}83$ и $-2 + 2\sqrt{2} \approx 0{,}83$. **335.** а) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ и $\sqrt{3}$; б) $2\sqrt{3}$ и $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; в) $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$ и $-\sqrt{2}$; г) $\sqrt{2} - 1$ и $\sqrt{2} + 1$. **337.** а) $\frac{2}{3}$; б) нет; в) -6 и -3. **343.** а) $-\frac{4}{5}$ и 2; б) -7; в) $-\frac{5}{4}$ и $\frac{1}{4}$; г) -4 и $1\frac{1}{5}$. **344.** а) -6 и 10; б) 1 и 3. **345.** а) $-1\frac{1}{3}$ и 2; б) -6 и 5; в) 2 и $\frac{1}{2}$; г) $-\frac{7}{10}$ и $\frac{1}{2}$; д) $-\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{10}$; е) -6 и $1\frac{1}{2}$. **346.** а) $\sqrt{5}$; б) $-\sqrt{7}$; в) $-3\sqrt{6}$ и $\sqrt{6}$; г) $-\sqrt{2}$ и $3\sqrt{2}$. **347.** 2) а) 1 и 9; б) 16 и 25; в) нет корней. **350.** 1) 20 м и 30 м; 2) 10 м и 60 м. **351.** 70×70 см. **352.** 12 км/ч и 16 км/ч. **353.** 5 см, 12 см и 13 см. **354.** 12 дм и 18 дм. **355.** 0,5 м. **356.** а) 7 и 9; б) 4 и 5. **357.** Да: $n = 14$; нет. **358.** Да: 6, 8 и 10; нет. **359.** $n = 11$. **360.** 6 человек. **361.** 16 шахматистов. **362.** а) 3,4 с; б) 9,2 с. **363.** 1 с и 2 с. **364.** 0,6 с и 1,4 с. **365.** 1) $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$. **369.** а) -9 и 0; в) $-\frac{5\sqrt{2}}{2}$ и $\frac{5\sqrt{2}}{2}$; д) $-2\sqrt{3}$ и $2\sqrt{3}$. **370.** в) 0 и 5. **371.** а) $-\sqrt{\frac{2}{3}}$ и $\sqrt{\frac{2}{3}}$; б) $-2\sqrt{6}$ и $2\sqrt{6}$; в) 0 и 3. **374.** а) -1 и 1; б) 0, 1 и 3; в) -2, $-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ и 2; г) -5, $\sqrt{5}$ и 5. **377.** 2) *Указание.* Введите замену: а) $y = 6 - 3x$; б) $y = 5x - 8$. **378.** а) 5 и 6; б) 7 и 8. **379.** а) 6 дм; б) 240 см^2. **381.** 5×15 см и 5×10 см. **382.** 2 с. **383.** а) 3 и 4; б) 6 и 8. **384.** ≈ 2 см и ≈ 4 см. **388.** а) $x_2 = 5$; б) $x_2 = -5$; в) $x_2 = -1$; г) $x_2 = -6$. **390.** а) $x_2 = 4$, $p = 1$; б) $x_2 = 18$,

$q = -180$. **394.** 1) $-\frac{2}{3}$ и $2\frac{2}{3}$; 2) а) $4\frac{1}{3}$ и $5\frac{2}{3}$; б) $-2\frac{1}{2}$ и 2. **398.** а) $y^2 - 183y - 222 = 0$; б) $y^2 + 185y - 1814 = 0$. **399.** б) $x^2 - 2x - 3 = 0$ и $x^2 + 2x - 3 = 0$. **405.** а) $(m + 6)(m - 3)$; б) $(b + 8)(b + 1)$; в) $(a + 3)(a - 2)$; г) $(n - 10)(n + 6)$. **407.** а) $(x + 1)(2x + 1)$; б) $(3 - z)(4z + 1)$; в) $(2m - 3)(3m - 1)$; г) $(n + 1)(7n + 2)$. **409.** а) $\frac{x + 1}{x}$; б) $\frac{a - 3}{a + 5}$; в) $\frac{y - 3}{2y}$; г) $\frac{b + 5}{b - 3}$; д) $\frac{m - 4}{m + 2}$; е) $\frac{n + 1}{n + 4}$. **410.** а) $(2x+7)(3x+2)$; б) $(2y - 3)(9y + 4)$; в) $(3 - 4z)(3z + 5)$; г) $(m - 4)(8m + 5)$; д) $(3 - 2a)(3a + 4)$; е) $(3b + 4)(8b - 9)$. **411.** д) $\frac{2x - 5}{2x - 1}$; е) $-\frac{3x + 2}{x + 3}$. **413.** б) $k = 4$; г) $k = -12$. **414.** а) $x(x + 1)(x + 2)$; г) $x^2(x + 3)(x - 2)$. **416.** г) $(a - 2)(a + 2)(a + 1)(3a - 1)$. **417.** а) $(x - 2)(x + 2)(x - 1)(x + 1)$; в) $4x^2(x - 2\sqrt{2})(x + 2\sqrt{2})$; г) $3(x^2 + 5)(x + 5)(x - 5)$. **418.** б) $(a + b - 12)(a + b + 7)$; е) $(x + 1)(x + 3)$. **419.** а) $(m - 7n)(m - 4n)$; б) $(a + 2b)(a - 18b)$; в) $(x + 20y)(x + y)$. **420.** а) $\frac{x + a}{x - 3a}$; б) $\frac{x - 7a}{x^2 + 4ax + 16a^2}$.

Узнайте больше

2. а) -7, -1 и 3; б) -1 и 5; г) -2, -1, 1, 2 и 3. **3.** а) -2 и 1; б) -1, 2 и 11; в) -1, $\frac{3}{2}$ и 3; г) $-\frac{1}{5}$, 1 и 10. **4.** а) $(x + 1)(x - 1)^3$; б) $(x + 1)^2(x + 2)(x - 3)$; в) $(x - 1)(x + 5)(4x + 5)$; г) $(x - 1)(x + 1)(5x + 3)$.

Глава 4

425. а) (2; 2); б) (-6; 6). **426.** $c = -4$. **434.** в) (1; 8), (2; 6), (3; 4), (4; 2); г) (2; 5), (4; 4), (6; 3), (8; 2), (10; 1). **436.** 3 осьминога и 3 морские звезды. **437.** Всего два варианта: 1 пятирублёвая и 7 двухрублёвых; 3 пятирублёвых и 2 двухрублёвых. **438.** Пятиугольников и шестиугольников соответственно 2 и 15, 8 и 10, 14 и 5. **439.** 4 маленьких и 6 больших. **440.** По алгебре и по геометрии заданий могло быть соответственно: 12 и 16, 16 и 13, 20 и 10. **441.** 3 решения: 5 и 12 задач; 10 и 8 задач; 15 и 4 задачи. **442.** Можно: например, 1 пачку по 25 штук и 12 пачек по 35 штук. **443.** 22 коробки. **444.** 4 решения: 18 ч и 0 тарелок; 19 ч и 5 тарелок; 20 ч и 10 тарелок; 21 ч и 15 тарелок. **452.** (1; 0), (-3; 0), (0; $\sqrt{3}$), (0; $-\sqrt{3}$); $r = 2$. **453.** (0; 0), (1; 0), (-1; 0), (0; -2). **465.** 1) Прямая $2x - 3y = 6$. **468.** а) (2; 6); б) (5; 4). **469.** 45 кв. ед. **470.** а) $a = 2$; б) $b = 3$. **472.** 1) $y = 20 - 9x$. **495.** а) $y = 2x + 5$; б) $y = -7x + 5$; в) $y = \frac{2}{3}x + 5$. **496.** $y = -\frac{3}{4}x - 2$; б) $y = -\frac{3}{4}x + 100$; в) $y = -\frac{3}{4}x$. **497.** а) $y = -x$, $y = -x + 4$, $y = -x - 3$; б) $y = 0{,}5x$, $y = 0{,}5x + 3$, $y = 0{,}5x - 2$. **499.** а) В IV четверти; б) в I четверти. **505.** а) (0; 0); б) (7; -5);

в) (0,8; −1,3); г) $\left(\frac{6}{7}; \frac{1}{7}\right)$. **506.** а) (3; −1); б) $a = 6$; $b = -2$; в) $x = 57$; $z = 48$; г) $k = 1$; $l = 2$. **507.** а) (8; 6); б) (2,5; 3); в) (10,5; 14); г) нет решений. **508.** а) (7,5; −3,5); б) (12,5; −2,5); в) (6; −1); г) (2; 0). **509.** а) (4; −3); б) (−3; 1); в) (0,5; 2); г) (21; 48). **510.** а) 16 и −18; б) 115 и 175. **514.** в) x — любое число, $y = 4 - x$; г) x — любое число, $y = 3x - 5$; е) x — любое число, $y = \frac{1-x}{2}$. **520.** а) (5, −2); б) (1, −1); в) $x = -47$, $z = 125$; г) $x = -5$, $z = -7$. **522.** а) В IV четверти; б) в IV четверти; в) в III четверти; г) в I четверти. **523.** а) (2; −5); б) (−3; 4); в) (12; 9); г) (3,6; −1,2). **524.** а) (90; 120; 3); б) $a = -10$; $b = -2{,}5$; $c = 12{,}5$; в) (0; −3; −1); г) $a = -11$; $b = -7$; $c = -2$. **525.** а) (−2; 0; 4); б) $u = 4$; $x = -1$; $y = -2$; $z = 3$. **526.** а) (17; 15) и (10; 6); б) (8; 7) и (4; 1). **527.** а) (4; 3) и (−4; −3); б) (2; 4) и (4; 2); в) $(\sqrt{8}; \sqrt{8})$ и $(-\sqrt{8}; -\sqrt{8})$. **529.** а) (8; 4); (4; 8); б) (6; 2); (−2; −6); в) (0; 2); (−4; −2); г) (2; 2); (−6; −2); д) (2; 0); (5; 3); е) (7; 3); $\left(\frac{15}{4}; -\frac{7}{2}\right)$. **530.** а) Пересекаются в точках (1; 1) и (−2; 4); б) пересекаются в точках (3; −9) и (−1; −1); в) не пересекаются; г) пересекаются в точках $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; \frac{\sqrt{5}-3}{2}\right)$ и $\left(-\frac{\sqrt{5}+1}{2}; -\frac{\sqrt{5}+3}{2}\right)$. **531.** а) (−2; 4); (3; −1); б) (−0,6; 1,8); (1; 1). **534.** 750 г и 250 г. **535.** 15 км. **537.** 24 м и 30 м. **540.** 420 девочек и 480 мальчиков. **541.** 2000 р. и 2600 р. **542.** 90000 р. **544.** 25 мл 4 %-ного и 50 мл 10 %-ного раствора. **545.** а) Существует; 5 шестиугольников и 10 квадратов; б) Не существует. **546.** 4 ч 15 мин и 12 ч 45 мин. **547.** 35 лет, 10 лет и 60 лет. **548.** 3 кг, 3 кг и 2 кг. **550.** а) $y = 3x - 4$; б) $y = = -2x + 3$. **551.** а) $y = 2x - 4$; б) $y = -\frac{1}{2}x + 2$. **552.** а) $y = 3x + 7$; б) $y = \frac{1}{2}x + 2$. **553.** а) $4x + 3y = 6$; б) $5x - 2y = -2$. **554.** а) $7x + 4y = 19$; б) $4x - 5y = 1$. **555.** а) $y = \frac{3}{2}x + 1$ или $3x - 2y = -2$; б) $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$ или $3x + 4y = 10$. **557.** а) Проходят; б) проходят. **558.** При $k = 1$. **559.** а) $A(2; 1)$ — точка пересечения прямых; расстояние от точки A до оси x равно 1, до оси y равно 2; б) $A(-3; -2)$ — точка пересечения прямых; расстояние от точки A до оси x равно 2, до оси y равно 3. **560.** (3; 4), (0; 2), (5; −4). **561.** а) Да; б) нет. **563.** а) $y = -\frac{1}{2}x + 2$; б) $y = -\frac{1}{2}x - 2$; в) $y = \frac{1}{2}x - 2$. **564.** 5) а) $y = \frac{3}{2}x$; б) $y = \frac{3}{2}x - 4$; в) $y = \frac{3}{2}x + 3$.

Узнайте больше

4. $\begin{cases} x + 3y < 16, \\ 2x + y < 12, \\ x > 0, \\ y > 0. \end{cases}$ **6.** а) $\begin{cases} y \geq x^2, \\ y \leq 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y \geq x^2, \\ y \leq 2x; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y \leq -x + 2, \\ y \leq x + 2, \\ y \geq 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4, \\ |x| \geq 1. \end{cases}$

Глава 5

569. а) 240 км; б) 2,4 ч; 144 км; 96 км; в) автомобиль, на 2 ч; г) на 20 км/ч. **573.** $p(n) = \frac{n(n-3)}{2}$; n — натуральное число; $n \geq 4$; $p(5) = 5$; $p(10) = 35$; $p(n) = 14$ при $n = 7$; $p(n) = 54$ при $n = 12$. **575.** б) -1; 1; $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$. **576.** б) $-0{,}1$. **578.** в) $f(2) = f(-2)$, утверждение верно. **579.** $f(-1) = 6$; $f(2) = 4{,}5$; $f(\frac{1}{4}) = 1$. **582.** $f(a) = f(-a) = a^2 + 1$; $f(a + 1) = (a + 1)^2 + 1 = a^2 + 2a + 2$. **585.** а) -7; б) 4. **587.** а)–в) Все числа; г) все числа, кроме 3 и -3. **588.** а) $x \geq 0$ и $x > 0$; б) все числа, кроме 2 и -2. **595.** Принадлежит точка $(-1; 10)$. **596.** б) Да, в точках $(0; 0)$ и $(1; 0)$. **597.** б) Ось x в точке $(\frac{1}{8}; 0)$, ось y в точке $(0; 1)$. **606.** а) -2; 4; г) $\sqrt{10}$; $-\sqrt{10}$. **607.** а) 1; $-1{,}5$; $\frac{1}{3}$. **618.** $f(0) = -2$; $f(1) = 98$. **619.** $y = 0{,}7x$. **643.** $k = -3$.

Глава 6

651. а) 36; б) 32. **652.** Среднее арифметическое равно $3\frac{11}{14} \approx 3{,}8$, мода — 4, медиана — 4. **662.** На 0,024. **664.** 0,003; 0,997. **666.** 105. **671.** $\frac{19}{64}$. **679.** $P(A) = \frac{1}{36}$, $P(B) = \frac{1}{9}$, $P(C) = \frac{1}{4}$, $P(D) = \frac{1}{18}$. **680.** а) $\frac{2}{5}$; б) $\frac{3}{5}$. **682.** а) $\frac{1}{5}$; б) $\frac{7}{30}$. **683.** $\frac{2}{3}$. **684.** а) $\frac{1}{6}$. **685.** Одна красная и пять жёлтых. **686.** а) $\frac{2}{7!}$; б) $\frac{4}{12!}$. **688.** 0,5. **692.** а)–б) $\frac{1}{32}$. **697.** 7; $\frac{1}{6}$. **699.** 1000; $\frac{1}{1000}$. **700.** а) $\frac{1}{20}$; б) $\frac{1}{10}$; в) $\frac{2}{5}$. **701.** 0,036. **704.** а) 120; б) $\frac{2}{3}$; $\frac{2}{5}$; в) $\frac{4}{15}$. **705.** а) $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4}$; б) $\frac{1}{16}$; $\frac{3}{8}$; $\frac{9}{16}$. **706.** а) $\frac{1}{9}$; б) $\frac{4}{9}$; в) $\frac{1}{3}$. **707.** а) 0,75; б) $\frac{2\sqrt{2} - 1}{2}$. **709.** 0,64.